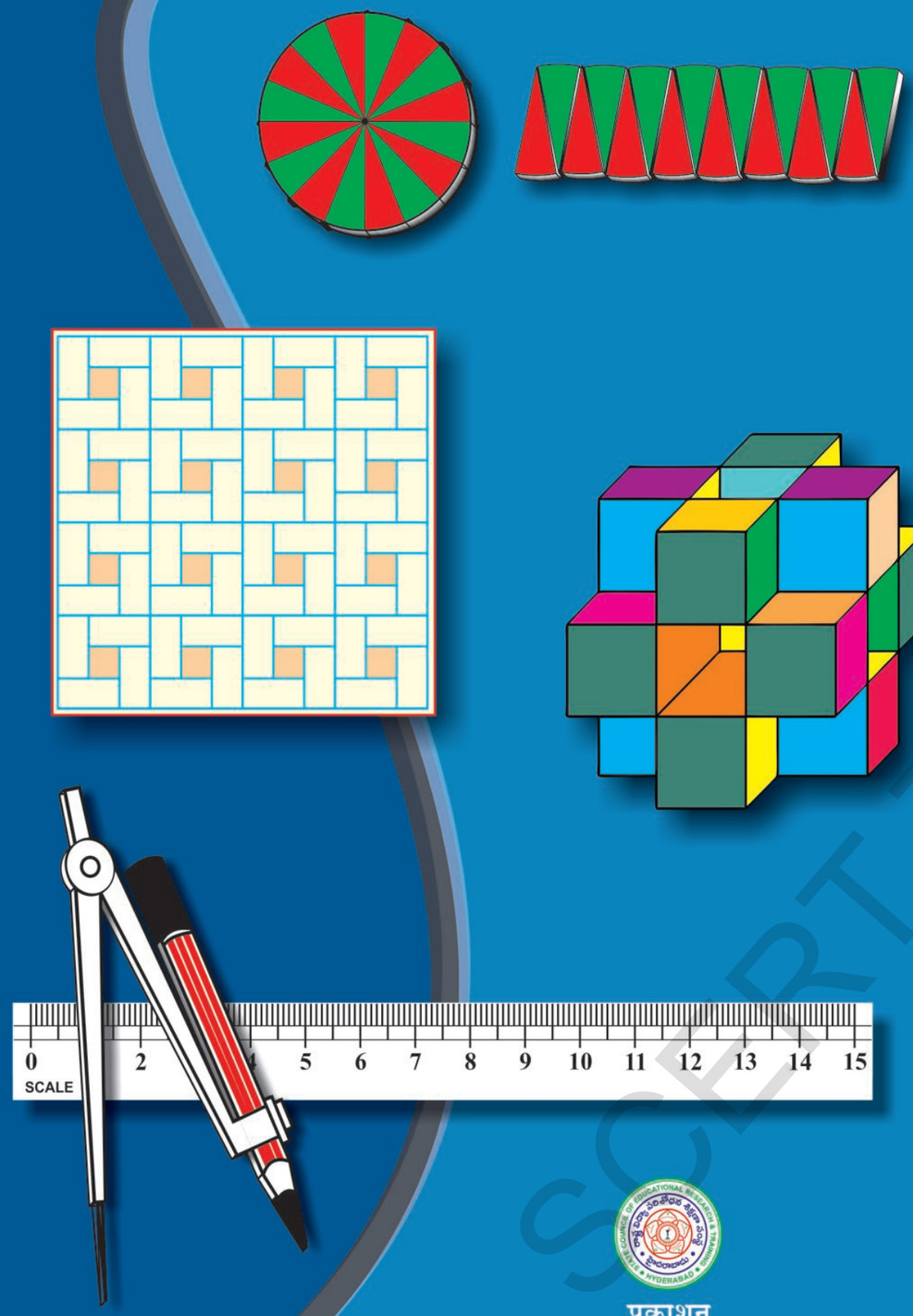
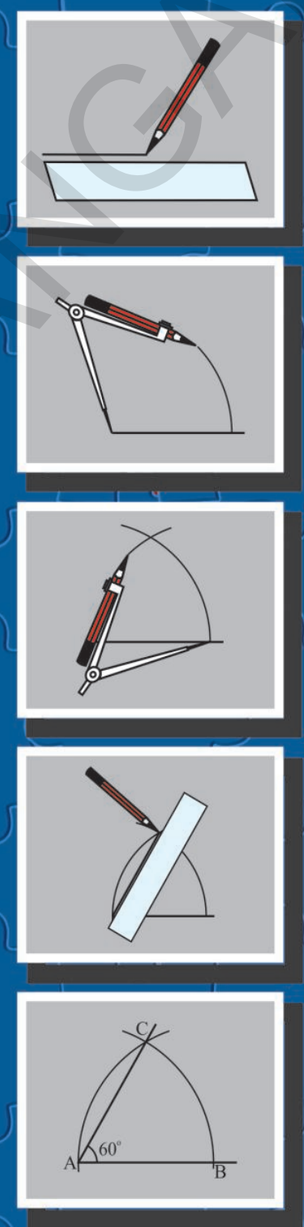


प्रकाशन
तेलंगाना सरकार, हैद्राबाद

तेलंगाना सरकार व्दारे मोफत वितरण

गणित

वर्ग 8 वा



FREE

गणित

MATHEMATICS

वर्ग 8 वा

Class VIII

प्रकाशन
तेलंगाना सरकार, हैद्राबाद

तेलंगाना सरकार व्दारे मोफत वितरण

SCERT TELANGANA

CHILDREN! THESE INSTRUCTIONS FOR YOU...

- For each and every conceptual understanding, a real life context with appropriate illustrations are given in the textbook. Try to understand the concept through keen reading of context along with observation of illustration.
- While understanding the concepts through activities, some doubts may arise. Clarify those doubts by through discussion with your friends and teachers, understand the mathematical concepts without any doubts.
- "Do this/Do these" exercises are given to test yourself, how far the concept has been understood. If you are facing any difficulty in solving problems in these exercises, you can clarify them by discussing with your teacher.
- The problems given in "Try this/try these", can be solved by reasoning, thinking creatively and extensively. When you face difficulty in solving these problems, you can take the help of your friends and teachers.
- The activities or discussion points given "Think & disicuss" have been given for extensive understanding of the concept by thinking critically. These activities should be solved by discussions with your fellow students and teachers.
- Different typs of problems with different concepts discussed in the chapter are given in an "Exercise" given at the end of the concept/chapter. Try to solve these problems by yourself at home or leisure time in school.
- The purpose of "Do this"/do these", and "Try this/try these" exercises is to solve problems in the presence of teacher only in the class itself.
- Where ever the "project works" are given in the textbook, you should conduct them in groups. But the reports of project works should be submitted individually.
- Try to solve the problems given as homework on the day itself. Clarify your doubts and make corrections also on the day itself by discussions with your teachers.
- Try to collect more problems or make new problems on the concepts learnt and show them to your teachers and fellow students.
- Try to collect more puzzles, games and interesting things related to mathematical concepts and share with your friends and teachers.
- Do not confine mathematical conceptual understanding to only classroom. But, try to relate them with your suroundings outside the classroom.
- Student must solve problems, give reasons and make proofs, be able to communicate mathematically, connect concepts to understand more concepts & solve problems and able to represent in mathematics learning.
- Whenever you face difficulty in achieving above competencies/skills/standards, you may take the help of your teachers.

Graph

SCERT TELANGANA

गणित

वर्ग 8 वा

MATHEMATICS

CLASS - VIII

(MARATHI MEDIUM)

पाठ्यपुस्तक विकास आणि प्रकाशन मंडळ

मुख्य निर्मिती अधिकारी : **श्री ए.सत्यनारायण रेड्डी,**
संचालक एस.सी.ई.आर.टी. हैद्राबाद.

मुख्य कार्यकारी अधिकारी **श्री बि.सुधाकार,**
संचालक ,शासकीय पुस्तक मुद्रणालय, हैद्राबाद.

संघटन प्रमुख : **श्री डॉ.एन. उपेंदर रेड्डी,**
प्रो.सी.ॲण्ड टी विभाग प्रमुख एस.सी.ई.आर.टी.हैद्राबाद,

प्रकाशक
तेलंगाना सरकार, हैदराबाद

कायद्याचा आदर करा
हक्क मिळवा

शैक्षणिक उन्नती साधा
प्रेमाने वागा

SCERT TELANGANA

© Government of Telangana, Hyderabad.

First Published 2013
New Impressions 2014, 2015, 2016, 2017, 2018,2019

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Telanga na.
We have used some photographs which are under creative common licence. They are acknowledged at later (page vii).

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho,
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

तेलंगाना शासनाव्दारे मोफत वितरण 2019-20

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

SCERT TELANGANA

पुस्तक विकास समिती सदस्य

श्री. प्रा.वि.कानान

गणित आणि संख्यिकी विभाग, विद्यापीठ हैद्राबाद

मुख्य सल्लागार

श्री. चुक्का रामय्या
शिक्षणतज्ञ हैद्राबाद, आं.प्र.

श्री. डॉ. एच.के. देवन
शिक्षण सल्लागार, विद्या भवन सोसायटी, रेसोर्स सेन्टर, उदयपुर, राजस्थान

लेखक

श्री .ताता व्यंकटरामा कुमार
मुख्याध्यापक, जेडीपीपीएचएस, मुलुमुडी,नेल्लोर जिल्हा

श्री.सोमा प्रसाद बाबु
पीजीटी,ए.पी.टी.डब्ल्यु.आर.एस.चंद्रशेखर पुरम, नेल्लोर जिल्हा

श्री.कोमानदुरी मुरली श्रीनीवास
पीजीटी,ए.पी.टी.डब्ल्यु.आर.श्रीशैल्लम

श्री.पडाला सुरेश कुमार
एस.ए.जीएचएस, विद्यानगर कॉलनी, हैद्राबाद

श्री.पी.डी.आय.गणपाई शर्मा
एस.ए.जीएचएस, झामीसतापुर,मानिकेश्वर नगर, हैद्राबाद

श्री.दुर्गाराजु वेनु
एस.ए.युपीएस,अल्लवाडा,चेवेल्ला मंडळ, आर.आर.जिल्हा

श्री.पी.ॲनोथी रेड्डी
मु.अ.सें.पिटर हायस्कुल आर.एन.पेटा.नेल्लोर जिल्हा

श्री.डी. मनोहर
एस.ए.जेडपीएचएस.,ब्राम्हमपेल्ली, ताडवाई मंडळ निजामबाद जिल्हा

श्री.गोटुमुक्कला व्हि.बी.एस.एन.राजु
एस.ए.एमपी। उच्च माध्यमिक शाळा, कापसा, विजयानगरम जिल्हा

श्री.के.वरदा सुंदर रेड्डी
एस.ए.जेडीपीपीएचएस,थाक्कसीला अमलापुर मुहबुबनगर जिल्हा

श्री.अब्बाराजु किशारे
एसजीटी, एमपीयुपीएस, चलामुडी गुट्टुर जिल्हा.

श्री.जी.आनंता रेड्डी
निवृत्त मुख्याध्यापक रंगारेड्डी जिल्हा

श्री.एम. रामानुजंनेयुल्लु
प्राध्यापक, शासकीय अध्यापक विद्यालय, विकाबाद, आर.आर.जिल्हा

श्री.एम. रामा चॅरी
प्राध्यापक, शासकीय अध्यापक विद्यालय, विकाबाद, आर.आर.जिल्हा

श्री. डॉ. ए. रामबाबु
प्राध्यापक, शासकीय सीटीई, वरंगल

श्री. डॉ. पुंनडला रमेश
प्राध्यापक, शासकीय आयएएसई, नेल्लोर

संपादक

श्री.प्रा. व्हि. शिवा रामप्रसाद
निवृत्त, संख्यिकी गणित विभाग
उस्मानिया विद्यापिठ, हैद्राबाद

श्री.डॉ. एस.सुरेश बाबु
प्राध्यापक,सांख्यिक विभाग
एससीईआरटी, आं.प्र. हैद्राबाद

श्री.प्रा.एन.सीएच.पट्टाभी रामाचार्यलु
निवृत्त नॅशलन इंस्टुअ ऑप टेक्नोल्योजी
वरंगल

श्री.के ब्राह्मया
निवृत्त प्राध्यापक, एससीईआरटी,आं.प्र. हैद्राबाद

समन्वयक

श्री.काकुलावरम राजेंद्र रेड्डी
एस.ए. युपीएस,तिम्मापुर,चामदापेट, नलगोंडा जिल्हा

श्री .ताता व्यंकटरामा कुमार
मु.अ. जेडपीपीएचएस, मुलुगुडी नेल्लोर जिल्हा

शैक्षणिक सहाय्यक गट सदस्य

श्री इंद्र मोहन **श्री यशवंत कुमार दवे** **श्री. हानिप पानिवाल** **श्री. आशिष चंद्रा**

विद्या भवन सोसायटी, रिसोर्स सेन्टर, उदयपुर, राजस्थान

श्री.शरन गोपाल **कुम एम.अर्चना** **श्री पी.चिरंजीवी**

सांख्यिक विभाग विश्वविद्यालय हैद्राबाद

रेखाटन

श्री.प्रशांत सोनी **श्री शेख शकिल अहमद** **श्री एस.एम. इकराम**

विद्या भवन सोसायटी, रिसोर्स सेन्टर, उदयपुर, राजस्थान

समन्वयक - **श्री.बी.आर.जगदीश्वर गौंड,** प्राचार्य, शासकीय अध्यापक विद्यालय, आदिलाबाद
अनुवादक - **श्री.प्रशांत भोयर,** एसए, गर्व्हमेंट गजीटेड हायस्कुल नंबर 1, आदिलाबाद
अनुवादक - **श्री.नागेश चनमनवार,**एसए, झेडपीएचएस, इंद्रवेल्ली, जिल्हा आदिलाबाद
अनुवादक - **श्री.सुभाष मुसळे,** एसए, युपीएस, मुतन्नुर, जिल्हा आदिलाबाद
अनुवादक - **श्री.गणेशकुमार सुर्यवंशी,** एसए, युपीएस शासकीय मराठी शाळा, जुने बस्थाक, आदिलाबाद
मराठी संगणक चालक - राजेश दानका, आदिलाबाद

SCERT TELANGANA

प्रस्तावना

शिक्षण ही मानवास अज्ञानातुन मुक्त आणि सामर्थ्यवान बनविणारी एक कार्यप्रणाली आहे. शिक्षणाची प्रचंड अव्यवस्था ओळखुन सर्व साधारणवादी समजानी दर्जेदार शिक्षणाची तरतुद करण्याचा अगदी स्पष्ट उद्देशाने प्राथमिक शिक्षणाचे सार्वत्रिक करण्याची जबाबदारी घेतली. दुसऱ्या पायरीत माध्यमिक शिक्षणाला सार्वत्रिक किंवा सर्वसाधारण करण्याची चालना मिळाली. माध्यमिक आवस्था ठळकपणे क्रियाशिल गणितापासुन सुरुवात झाली. उच्च प्राथमिक आवस्थेच्या अभ्यासापर्यंत शिस्तपुर्णक गणिताचे अध्ययन आहे. या अवस्थेत समस्येची तार्किक सिध्दता, प्रमेय इत्यादी परिचीत केले आहे. त्यापासुन वेगळा एक खास विषय जो इतर कोणत्याही विषयाचा सहगामी आहे. ज्यात विचारसरणी आणि पृथकरण आहे.

आपल्या आंध्रप्रदेशातील विद्यार्थ्या मोठ्या उत्साहाने आणि आनंदाने गणित शिकतील अशी मला खात्री वाटते.गणितास त्याच्या जिवणातील महत्वाचा अंग बनवुन आणि अर्थपुर्ण प्रश्न सोडवुन या पुस्तकांच्या वाचनाव्दारे गणिताचे मुलभुत आकार समजुन घेतील. शिक्षकांना अभ्यासक्रमातील अवघड विषयाकडे लक्ष वेघुन आणि अध्यापण शास्त्रातील दृष्य समजुन घेणे आणि ठळक विषयाकडे लक्ष केंद्रीकृत करण्याची गरज आहे. अभ्यासक्रमाच्या परिणाम कारक, व्यवहारासाठी संकिर्ण खोलीचे वातावरण, शिकविणे आणि शिकणे प्रणालित अत्यंत महत्वाचे आहे. वर्ग खोलीच्या संस्कृतीला संवर्धण करुन त्याच्या मनात धनात्मक रुची ठसवुन जिवनशैलीच्या वेगवेगळ्या संभावतेचा आणि अभिप्रायातील फरक आणि जिवन हे ज्ञानाची तहान आहे. हे शिक्षणाव्दारे त्यांच्या मनात ठसविले पाहिजे.

राज्य अभ्यासक्रम फ्रेम वर्क (SCF 2011) ने दाखवलेली गणित शिकविण्याच्या सदर कल्पणेस गणिताच्या दर्जेदार कागदावर श्रमकौशल्य निर्मीत करुन राज्यात गणित शिकविण्यासाठी पाठ्यपुस्तक प्रमाणाची मांडणी केली. सर्व भावनांना साकार करण्याचा प्रयत्न पाठ्यपुस्तकाने केला आहे. राज्य विद्या परिशोधन संस्था (SCERT) आपल्या राज्यामधील सर्व शिक्षकवृंद ज्यानी या पाठ्यपुस्तकांच्या विकासासाठी हातभार लावला आणि पाठ्यपुस्तक विकास समितीच्या मेहनतीची प्रशंसा केली. मी जिल्हाशिक्षणाधिकारी, मंडळ शिक्षणाधिकारी आणि मुख्य शिक्षकाचा अतिशय आभारी आहोत. मी संस्था आणि संघटना यांचा सुध्दा आभारी आहे, ज्यांनी या पाठ्यपुस्तकाच्या विकासात वेळ दिला मी कार्यालयाचे निदेशक आणि शालेय शिक्षणाचे संचालक ज्यांनी या पाठ्यपुस्तकाच्या विकासासाठी साहय्यता प्रधान केली. त्यांचे सुध्दा मी आभारी आहे. या कामाला निरंतर परिश्रमाने दर्जावाढविल्या बद्दल तुमचे आभारी आहोत.तुमच्या स्पष्टीकरणाचे आणि सल्ल्याचे आम्ही मनपुर्वक स्वागत करतो.

Place : Hyderabad

Date : 03 December 2012

संचालक,

एस.सी.ई.आर.टी., हैद्राबाद

SCERT TELANGANA

राज्य अभ्यासक्रम फ्रेम वर्क (SCF - 2011) च्या आधाराने आंध्र प्रदेश शासनाने सर्व विषयांच्या अभ्यासक्रमाची उजळणी करण्याचा निश्चय केला. त्यांच्या मागणीनुसार शाळेतील विद्यार्थ्यांच्या जिवनात शाळेच्या बाहेरील जिवनाशी नक्कीच संबंध असायला पाहिजे. शिक्षणाचा (RTE - 2009)हक्कामुळे कळुन आले की शाळेत प्रवेश करणाऱ्या प्रत्येक विद्यार्थ्यांस आवश्यक प्राविण्य 14 वर्षाच्या वयाच्या पातळीवर प्राप्त झाले पाहिजे. नॅशनल करीकुलम फ्रेम वर्क 2005 च्या आधारावर परिचित केलेला पाठक्रम हा अतिशय आवश्यक आहे. विशेष म्हणजे गणित हा विज्ञान हे माध्यमिक पातळी वर राष्ट्रीय दृष्टीकोनातुन आपल्या विद्यार्थ्यांना गणिताचा आणि विज्ञानाचा मजबुत आधार देण्याची आवश्यकता आहे.

देशाची शक्ती ही त्याच्या लोकांना जबाबदार आणि क्षमतापुर्ण बनविण्या वर असते जे त्यांच्या गरजा भगविते, महत्वाकांशा आणि प्रयत्नशिल औद्योगीक सामाजाच्या गरजेवर आधारीत असते. प्राध्यमिक व माध्यमिक शिक्षणाचा गणिताच्या शिक्षकांनी 8 ते 10 वर्गाच्या पाठ्यक्रमाचे अध्ययन करुन त्यांची पार्श्वभुमीच्या विस्तार आणि सखोल पणा समजुन घेणे आणि त्या विषयाचे उपयोगजन विद्यार्थ्यांव्दारे प्राथमिक आणि उच्चप्राथमिक अवस्थेत करुन घेतले पाहिजे.

गणिताचा पाठ्यक्रम तीन अवस्थेत म्हणजेच प्राथमिक उच्च प्राथमिक हा रचनात्क आणि मागमोही ने प्रवेश केला आहे. पाठ्यक्रम हा रचनात्क रुपात प्रवेश शोधुन काढण्यावर जोर दिलेला आहे आणि मुलभुत गणिताच्या आणि त्याचे स्पष्टीकरण दिलेले आहे. विद्यार्थ्यांना सहभागी होण्यासाठी प्रेरणा, चर्चा आणि वर्गात उत्साहाने भाग घेण्यासाठी त्यास जवळ करते. आजचे पाठ्यक्रम अभ्यासक्रमाच्या आणि शैक्षणिक पात्रतेच्या आधारावरुन लिहिल्या गेले आहे. TS SCERT ने तयार केलेल्या अभ्यासक्रमाची पक्की उजळणी करुन उदयास आले आहे.

पाठ्यक्रम सहा क्षेत्रात विभागल्या गेले आहे. जसे संख्या पध्दत, अंकगणित, बिजगणित, भुमीती, सांख्यिकी आणि निर्देशांक भुमीती या क्षेत्राशी संबंधीत असलेल्या विषयाच्यसा शिकवणीमुळे शैक्षणिक पात्रतेमधील प्राविण्य जसे समस्यसा सोडविणे, तार्किक विचार, गणिताचे परस्पर संबंध माहितीचे विविध रुपात इत्यादी विकास होतो. गणितामुळे अध्ययनाची शिस्त आणि दैनदिन परिस्थितीत सुध्दा होते. पाठ्यपुस्तकामुळे प्रयत्न जास्त प्राधान्यता आणि ध्यायावरुन परिश्रमाची वाढ होते. लहान गटातील अवसर आहे. आणि हे करा. आणि प्रयत्न करा या रुपातील अनुभावाला आवश्यक असलेले कृत्य वर्गातील परिस्थितीला आटोक्यात आणण्यासाठी शिक्षकांची मदत जरुरी आहे.

या पुस्तकाचे काही विशेष वैशिष्टये खाली दिलेले आहे.

☛ या धड्याची रचना वेगवेगळ्या पध्दतीने केली आहे. ज्यामुळे विद्यार्थी सर्व अभ्यासक्रमाच्या क्षेत्रात रुची घेऊन. अभ्यासाच्या प्रत्येक पदात रुची ठेवतो.

SCERT TELANGANA

- उच्च प्राथमिक वर्गांना भुमीती शिकविणे केवळ अंर्तज्ञान होते. आणि मापावरुन आणि कागदाच्या घड्यावरुन गुणधर्माचा शोध घेतल्या जाते. आता आपण स्वंयसिध्दी मध्ये प्रवेश केलेला आहे. निरनिराळे प्रयत्न स्पष्टीकरणातुन निर्माण होतात. माहिती समझण्यासाठी व्याखेसाठी, व्याख्या न केलेली पदे आणि स्वत:सिध्द आले नविन संबंध काढणे त्याच्या प्रमेय म्हणतात. ही स्विकारलेल्या तत्वाचे तार्कीक परिणाम आहेत.
- प्रत्येक प्रमेय पाहण्यासाठी काळजी घेतली पाहिजे जी या प्रमेयाच्या सिध्दतेला सोप्यारितीने समजण्यासाठी वृत्याच्या साहाय्याने प्रारंभीक तरतुद केली आहे.
- निरंतर आकलन करुन किंमत ठरविण्याची कार्यप्रणाली वस्तुंच्या प्रयत्न करा, आणि विचार,चर्चा आणि लिहा याखाली आच्छादलेली आहे. अशा प्रत्येक वस्तुंचा शेवटी अभ्यास दिलेला आहे. ज्यामुळे शिक्षकास पुर्ण 15 धड्यातील मुलांचा कुशलता माहित होतो.
- संपुर्ण पाठ्यक्रम 15 धड्यात विभागलेला आहे. ज्यामुळे पाठंयाशातुन लहान लहान प्रश्नाला तर्काला एकत्रकरुन उत्साहाने गणित शिकवतात.
- संगित चित्र, आकृत्या, वाचता येणारा अक्षराचा आकार निश्चीतपणे मुलांना पाठ्यांश स्विकाराण्यास मदत मिळते.

धडा (1) : परिमेय संख्या ज्या संख्या पध्दतीच्या क्षेत्रात येतात. परिमेय संख्या भिन्नापासुन कशा वेगळ्या आहेत. याच्या संबंध कळतो. परिमेय संख्येचे गुणधर्म उदाहणाच्या स्पष्टीकरणा करुन चर्चा करता येते. मुलांना संख्येरेषेवर परिमेय संख्यांना पाहण्याचा अवकाश दिला.परिमेय संख्यांना संख्यसा रेषेवर दशांशाच्या रुपात प्रदर्शन आणि उलट 6 व्या धड्यात वर्ग ाअणि वर्गमुळ मुलांना पुर्ण वर्ग, वर्ग संख्येचे गुणधर्म आणि अवयव पध्दतीने वर्गमुळ काढणे भागाकाराच्या पध्दतीने काढेण हे मुलांना समजविण्याच्या आपण प्रयत्न करु. घन आणि घनरुपास विविध उदाहरणाच्या स्पष्टीकरणावरुन चर्चा करा.

धडा (2) (4) (11) आणि (12) मध्ये बिजगणित आहे. या धड्यात रेषीय समीकरण एका चलात आहे. शाब्दिक रुपातील असलेल्या समस्यांचा चल माहित करण्यासाठी आणि प्रतिक्षेपण पध्दतीने तिच्या किंमती काढण्यासाठी एक अवकाश मुलांना दिला. घातांक आणि घात या धड्यात काही अलगारीदम ला मोठ्या संख्येच्या घातांकाच्या रुपात लिहिण्यासाठी दिलेले आहे. विविध उदाहरणाच्या स्पष्टीकरणाने घातांकाच्या नियमाची चर्चा करण्यात आली. बैजीक राशीच्या धड्यात आणि अवयव बैजिक समानता जशी $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ आणि $(x \pm a)(x \pm b) = x^2 \pm (a + b)x + ab$ विविध किंमतीवरुन तपासणीची चर्चा करण्यात आली या रुपाचे बैजिक राशिचे अवयव पाडणे, एकुण प्रश्न मुलांना सरावासाठी दिले आहेत.

SCERT TELANGANA

धडा (5)गुणोत्तर प्रमाण, संयुक्त गुणोत्तर,टक्केवारी, गुणोत्तर नफा आणि तोटा विक्रीकर / वॅट सरळ व्याज, आणि चक्रवाढ व्याज, वर्षाला, सहामहिण्यात आणि तीन महिण्यात आणि चक्रवाढ व्याजाच्या सुत्राने उपयोगजन या बहुलुक तुलना आणि चर्चा या धड्यात आहे.

धडा (10) हा सम आणि व्यस्त प्रमाण त्यामध्ये समप्रमाण, व्यस्त प्रमाण आणि मिश्र प्रमाण ची नित्य जिवणातील वेगवेगळी समस्या यात आहे.

धडा (15) मध्ये संख्याशी खेळ विद्यार्थ्यांना अलगारीदम आणि संख्याच्या काही नमुन्याव्दारे नियम माहित करण्याचा अवकाश दिला आहे. भागाकाराच्या नियमाच्या चर्चेवरुन नविन नियम शोधुन काढले आहे. ॲपलसंख्या आणि कोडे मुलांमध्ये उत्साह निर्माण होण्यासाठी दिले आहे.

विद्यार्थ्यांनि त्याच्या भोवती पाहिलेल्या सदृष्य आणि रचना केलेल्या आकृतीच्या प्रशंसा करण्याच्या उद्देशाने भुमीतीची चर्चा केली आहे. धडा (3) मध्ये चौकोनाच्या रचनेसाठी त्यावर केंद्रीकृत केले आहे. नमुन्यासाठी सर्व रचनेचे नमुन्यासाठी स्पष्टीकरण केलेली उदाहरणे घेतली आहे.धडा(13) 3D चे 2Dमध्ये दृष्यमान या मध्ये विद्यार्थ्यांचे 3D व्दारे विविध आकृत्या शोधण्यासाठी पुरेसा अवकाश दिला आहे.

माहिती हाताळण्यासाठी क्षेत्रात आकृत्या आणि आलेखाच्या पध्दतीने विद्यार्थ्यांत्यावर त्याच्या सभोवताली ज्ञानाची ओळख करुन घेते.

धडा (7)मध्ये तक्ता आणि आलेखात तक्त्याच्या साहाय्याने माहिती सामग्रीचे वर्गीकरण आणि सामग्रीला वारंवारता आलेखात प्रदर्शित करणे साठी जसे स्तंभालेख, बहुभुज संचिव वारंवारता वक्र काही उदाहरण मध्य, मध्यक आणि बहुलुकाची उजळणी करण्यासाठी दिली आहे. आणि अवघड प्रश्न सोडविण्याचा पर्यायी पध्दतीची चर्चा केली आहे.

शेवटी धडा (9),मध्ये प्रतलिय आकृतीच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ समलंब चौकोन,वर्तुळ, वर्तुहाकार रिंग ाअणि वर्तुळखंड, पृष्टभागाचे क्षेत्रफळ आणि घताचे घनफळ आणि आयताचे घनफळ इत्यादी बदल आपण चर्चा केली केवळ चांगल्या पाठ्यक्रपुस्तकाचे चर्चा केली चांगल्या पाठ्यक्रम पुस्ताकाचे उत्पादन दर्जेदार शिक्षणाची खात्री देत. चालवित नाहीत. शिकणाऱ्याचा सहभाग कृत्य आणि समस्या मध्ये त्यास खात्रीने समजझुन घेतले पाहिजे.

म्हणुन आशा करते की, शिक्षक शिक्षणाच्या प्रणलिय रुपावली किंवा नमुन्यात बदलुन त्यापासुन केवळ नित्य अभ्यासातील प्रश्न सोडवुन त्या संदर्भास समजुन चार्तुयाने समस्यां सोडविल्या पाहिजेत.

SCERT TELANGANA

जार्ज पोल्या (1887 - 1985)

George Polya
(1887-1985)

काही जणांनी या प्रश्नांबद्दल विचार केला कि, प्रश्न सोडविण्याची कला शिकलेली आहे का काही जणांत ते अंगी असलेले कौशल्य आहे. मरण पावलेल्या जार्ज पोल्यांनी याचे प्रभावशाली आणि स्पष्ट रुपात उत्तर दिले. पोल्याचे जन्म हंगरी इथे इ.स. 1887 मध्ये झाला. आणि त्यांनी गणितात काही वर्ष त्यांनी झुरीच मधील स्वीस इन्सीट्युट ऑफ टेक्नालोजी मध्ये शिकविले. त्यांनी लिहिलेल्या अनेक पुस्तकांमधील हाऊ टु साल्व आय (1945) याचा जास्त अभिमान वाटला. ही पुस्तके सुमारे एक मिलीयन प्रति विकल्या गेली. आणि त्याचे भाषांतर 17 भाषेत केले गेलेत.

पोल्याचे सोडविण्याचे चार सिध्दांत

1. समस्या समझने:

हा सिध्दधांत वैकल्पकरित्या वाटला कि त्याचा उल्लेख करण्याची गरज भासली नाही. विद्यार्थ्यांना अनेकदार या समस्येला सोडवितांना त्याचा परिश्रमात अडचणी निर्माण झाल्या कारण त्यांना ती बरोबर पुर्ण पणे समझली नाही किंवा त्याचा भाग समझला नाही. शिक्षकांनी असे प्रश्न विद्यार्थ्यांना विचारले पाहिजेत जसे.

तुम्हाला प्रश्न सांगतांना त्यातील सर्व शब्द समजले काय? जर नाही तर तुम्ही पुस्तकाच्या मागच्या पानावरील सुचीत पहा. किंवा शब्दकोषात पहा जिथे तुम्हाला आढळुन येते. तिथे पहा. तुम्ही शोधण्यासाठी काय विचारता किंवा दाखविण्यासाठी तुम्ही तो प्रश्न तुमच्या स्वत:च्या शब्दात पुन्हा सांगा. प्रश्न सांगण्याचा दुसरा उपाय आहे. काही संख्येच्या रुपातील उदाहरणांचा तपशिल तुम्ही मांडु शकता जो तुम्हास प्रश्न सुबोध करण्यासाठी मदत मिळते. तुम्ही चित्र किंवा आकृतीचा विचार केलात का जो तुम्हाला समस्या समझण्यासाठी उपयोगी पडतो. प्रश्नाचे उत्तर येण्यासाठी इथे पर्याप्त माहिती आहे काय? इथे काही जास्तीची माहिती आहे का? उत्तरासाठी तुम्हाला खरोखच काय गरज आहे.

2. योजना तयार करणे

एकदा त्यास पुर्णपणे ओळखुन त्यास भरपुर परिश्रम लावुन समस्या सोडविण्यासाठी एक योजना बनविणे परंतु तुम्ही चालु करण्यास घाबरु नका तुम्ही बरोबर रस्त्यावर आहात.इथे समस्या सोडविण्यासाठी पुष्कळ योग्य उपाय आहेत. त्याचा प्रयत्न करा आणि यशस्वी उपायाने हळुहळु काही अपयशस्वी चाचणीव्दारे उदयास येते. डावपेचाच्या अपुर्ण यादीत आहे.

✻ अंदाज आणि तपासणी ✻ नमुण्यासाठी पाहणे ✻ क्रमवारीने यादी बनविणे ✻ चित्र काढणे ✻विशेष रितीने सोडविलेल्या समस्येचा विचार आधीच सोडविलेल्या सारख्या समस्येचा विचार✻ संभ्यावता काढुन टाकणे ✻ साधी समस्या सोडविणे ✻ समतुल्यक प्रश्न सोडविणे ✻ साम्य असलेल्या समस्या सोडविणे. ✻ सममीतीचा वार ✻ नमुण्याचा वापर ✻ विशेष संदर्भ घेणे ✻ मागील काम करणे✻ सरळ विचार सरणी✻ सुत्राचा उपयोग ✻ समीकरण सोडविणे✻ विध्दवता दाखविणे

3. योजना अमलात आणने

योजना तयार करण्यापेक्षा योजनेस अमलात आणने नेहमी सोपे जाते. सामान्यता सर्वास काळजीपुर्वक पणा आणि सहनशिलता ही आवश्यक नैपुण्ये आहेत. जर युक्ती ताबडतोब काम न केल्यास त्यास चिकटुन राहावे. तरी सुध्दा युक्ती काम न केल्यास त्यास सोडुन नविन कौशल्याचे डावपेचाचा प्रयत्न करुन पहा. चुकीच्या मार्गाला जाऊ नका याच उपायाने गणित, सोडविल्या जाते.

4. भुतकाळाकडे दृष्टीक्षेप करणे

तुमच्या विचारणे आणि निश्चितपणे पृथक्करण करुन उलगडा पुर्ण करण्यासाठी भुतकाळकाडे दृष्टीपेक्षा केल्यास जास्त यश फक्त प्रश्न सोडविण्याची गुरुकिल्ली काय आहे? हे आपणास गणिताची शक्ती कशी प्राप्त होते. सामर्थ्यांसोबत चांगले विचार वर येऊन समस्या सोडविण्यासाठी याचा कधी सामना होत नाही.

SCERT TELANGANA

गणित वर्ग 8 वा

विषय सुची

धड्याचे संख्या	सुची	अभ्यासक्रम पुर्ण करण्याचा कालावधी	पान क्रमांक
1	परिमेय संख्या	जुन	1 - 33
2	एका चलातील रेषीय समीकरणे	जुन/जुलै	34 - 58
3	चौकोणाची रचना	जुलै	59-80
4	घातांक आणि घात	जुलै	81-95
5	गुणोत्तराचा वापर करुन राशींची तुलना करणे	ऑगस्ट	96-123
6	वर्गमुळ आणि घनमुळ	ऑगस्ट	124 - 149
7	वारंवारता वितरण सारणी आलेख	सप्टेंबर	150 - 182
8	भुमीतीय आकृत्यांचा शोध लावणे	सप्टेंबर/ऑक्टोंबर	183 - 200
9	प्रतलीय आकृत्यांचे क्षेत्रफळ	ऑक्टोंबर	201-232
10	सम आणि व्यस्त प्रमाण	नोव्हेंबर	233 - 249
11	बैजीक पदावली	डिसेंबर	250 - 268
12	अवयव पाडणे	डिसेंबर	269 - 283
13	3 डी चे 2 डी मध्ये दृष्यमान	जानेवारी	284-298
14	पृष्टफळ आणि घनफळ (घन आणि दिर्घघन)	जानेवारी/फेब्रुवारी	299 - 312
15	संख्याशी खेळ	फेब्रुवारी	313-338
16	उजळणी	मार्च	

SCERT TELANGANA

आपले राष्ट्रगीत

- रविंद्रनाथ टागोर

जन गण मन अधिनायक जय हे
भारत भाग्य विधाता ।
पंजाब, सिंध, गुजरात, मराठा
द्राविड उत्कल बंग ।।
विंध्य हिमाचल यमुना, गंगा
उच्छल जलधितरंग ।
तव शुभ नामे जागे ।
तव शुभ आशिष मागे ।
गाहे तव जय गाथा
जन गण मंगलदायक जय हे
भारत भाग्य विधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे
जय जय जय जय हे ।

प्रतिज्ञा

- पैडिमर्री व्यंकटा सुब्बारावु

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत. माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी, म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन. प्राणी मात्रावर दया दाखविण.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

SCERT TELANGANA

धडा 1

परिमेय संख्या

1.0 प्रस्तावना

प्रत्येकी 5 रुपये किंमत असलेल्या 3 पेनी सलमाला विकत घ्यायच्या होत्या. तिचा मित्र सतीश ला पण तसेच दोन पेनी विकत घ्यायच्या होत्या म्हणुन ते दुकानात गेले. दुकानदाराने सांगीतले की, 5 पेनी असलेल्या पॉकेट ची किंमत 22 रुपये आहे. तर एका पेनीची किंमत किती आहे ? ते आपण सहजपणे माहित करु शकतो की प्रत्येक पेनीची किंमत $\frac{22}{5}$ रुपये आहे ही किंमत दर्शविण्यासाठी येथे कोणती तरी नैसर्गिक संख्या आहे का.? हे दर्शविण्यासाठी येथे कोणती तरी पुर्ण संख्या किंवा पुर्णांक संख्या आहे का ?

अजुन एक उदाहरण पाहु या

शिमला मध्ये एका विशिष्ट दिवशी नोंद केलेल्या तापमानाची माहिती खालील प्रमाणे आहे त्याचे निरिक्षण करु.

वेळ	स.10.00 वा.	दु.12.00 वाजता	दु.3.00 वा.	रा.7.00 वा.	रा.10.00 वा.
तापमान	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

प्रत्येक संदर्भात प्रती तासाला किती तापमान बदलले ?

संदर्भ I सकाळचे तास: प्रति तासास बदलेले तापमान $\frac{14\,^{\circ}C - 11\,^{\circ}C}{2} = \frac{3}{2}\,^{\circ}C/hr.$
सकाळी 10:00 ते दुपारी 12:00

संदर्भ II दुपारचे तास : प्रति तासास बदलेले तापमान $\frac{17\,^{\circ}C - 14\,^{\circ}C}{3} = 1\,^{\circ}C/hr.$
दुपारी 12:00 ते दुपारी 3:00

संदर्भ III सांयकाळचे तास : प्रति तासास बदलेले तापमान $\frac{10\,^{\circ}C - 17\,^{\circ}C}{4} = \frac{-7}{4}\,^{\circ}C/hr.$
दुपारी 3:00 ते सायंकाळी 7:00

संदर्भ IV रात्रीचे तास : प्रति तासास बदलेले तापमान $\frac{5\,^{\circ}C - 10\,^{\circ}C}{3} = \frac{-5}{3}\,^{\circ}C/hr.$
सायंकाळी 7:00 ते रात्री 10:00

वरील संदर्भात आपल्याला $\frac{3}{2}\,^{\circ}C$, $1\,^{\circ}C$, $\frac{-7}{4}\,^{\circ}C$, $\frac{-5}{3}\,^{\circ}C$ या संख्या मिळाल्या.

SCERT TELANGANA

या तापमानात $\frac{3}{2}$ °C, 1 °C, $\frac{-7}{4}$ °C, $\frac{-5}{3}$ °C या संख्या वापरल्या गेल्या आहेत. या संख्यांना काय म्हटंल्या जाते ?

या परिमाणाना दर्शविण्यासाठी वेगवेगळया पध्दतीच्या संख्याची आवश्यकता असते हे येथे आपण माहित केलो.

अशा पध्दतीच्या संख्या विषयी चर्चा करु या. $\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{-10}{17}, \frac{3}{-2}, \frac{2013}{2014}$, ...

एखादी संख्या $\frac{p}{q}$, च्या स्वरुपात दर्शवित असेल आणि येथे p आणि q पुर्णांक असतील आणि $q \neq o$, तर अशा संख्यांना परिमेय संख्या म्हणतात. परिमेय संख्या 'Q'ने दर्शविल्या जाते. यांना भागाकार संख्या सुध्दा म्हटंल्या जाते.

खाली दिलेल्याचे निरिक्षण करा.

कोणत्याही नैसर्गिक संख्याला आपण दाखवु शकतो. उदा. 5 ला $\frac{5}{1}$ किंवा $\frac{10}{2}$ किंवा $\frac{15}{2}$ .....

याप्रमाणे कोणत्याही पुर्ण संख्याना आपण दाखवु शकतो.उदा. 0 ला $\frac{0}{1}$ किंवा $\frac{0}{1}$ किंवा $\frac{0}{2}$

कोणत्याही पुर्णांक संख्याला आपण दाखवु शकतो. उदा. -3 ला $\frac{-3}{1}$ किंवा $\frac{-6}{2}$ वरील निरिक्षणा वरुन आपण असा निष्कर्ष काढु शकतो कि सर्व नैसर्गिक संख्या, सर्व पुर्ण संख्या आणि सर्व पुर्णांक संख्या या परिमेय संख्या आहेत.

हे करा

$1, \frac{1}{2}, -2, 0.5, 4\frac{1}{2}, \frac{-33}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0.\overline{3}, 22, -5, \frac{2}{19}, 0.125$. या संख्याना योग्य त्या विभागात लिहा [एका संख्येला एका पेक्षा जास्त विभागात लिहु शकता.]

(i) नैसर्गिक संख्या ___, ___ ___ ___ ___

(ii) पुर्ण संख्या ___, ___ ___ ___ ___

(iii) पुर्णांक ___, ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

(iv) परिमेय संख्या ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

दिलेल्या संख्या मध्ये तुम्ही कोणत्या तरी संख्येला परिमेय संख्येच्या विभागातुन बाहेर ठेवले का ? प्रत्येक नैसर्गिक संख्या, पुर्ण संख्या आणि पुर्णांक या परिमेय संख्या आहे का ?

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करा.

1. हमीद म्हणला की, $\frac{5}{3}$ ही परिमेय संख्या आहे आणि 5 ही फक्त नैसर्गिक संख्या आहे. साक्षी म्हणाली दोन्ही परिमेय संख्या आहेत. तुम्ही कोणाचे म्हणणे मान्य करता?
2. खालील वाक्य सत्य होण्यासाठी एक उदाहरण द्या.
   (i) सर्व नैसर्गिक संख्या या पुर्ण संख्या आहेत. पण सर्व पुर्ण संख्या नैसर्गिक संख्या होण्याची गरज नाही.
   (ii) सर्व पुर्ण संख्या हे पुर्णांक आहेत पण सर्व पुर्णांक हे पुर्ण संख्या नाहीत.
   (iii) सर्व पुर्णांक हे परिमेय संख्या आहेत पण सर्व परिमेय संख्या पुर्णांक होण्याची गरज नाहीत.

परिमेय संख्या वर मुलभुत क्रियांचा अभ्यास आपण मागील वर्गात अगोदरच केलेला आहे.

1.2 परिमेय संख्याचे गुणधर्म

1.2.1 संवृत्त:

(i) **पुर्ण संख्या आणि पुर्णांक**

पुर्ण संख्या आणि पुर्णांक मध्ये क्रिया

> जर दोन पुर्ण संख्यांची बेरीज पुर्ण संख्या येत असेल तर आपण असे म्हणु शकतो की, पुर्ण संख्याचा संच बेरजे मध्ये संवृत्त गणुधर्म असतो.

योग्य अशा उदाहरणा व्दारे आणि आवश्यक असलेल्या कारणाव्दारे हा खालील तक्ता पुर्ण करा.

संख्या	क्रिया			
	बेरीज	वजाबाकी	गुणाकार	भागाकार
पुर्ण संख्या	संवृत्त कोणत्याही दोन a आणि b पुर्ण संख्यासाठी $a + b$ हे पुर्ण संख्या असते	संवृत्त नाही कारण $5-7 = -2$ -2 हे पुर्ण संख्या नाही.	संवृत्त – – – – – –	संवृत्त नाही कारण $5 \div 8 = \frac{5}{8}$ हे पुर्ण संख्या नाही
पुर्णांक	– – –	संवृत्त a-b हे पुर्णांक असते कोणत्याही दोन a आणि b पुर्णांका साठी	– – – – – –	संवृत्त नाही कारण – – – – – –

SCERT TELANGANA

(ii) परिमेय संख्या - संवृत्त नियम

(a) बेरीज

समजा $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$ या दोन परिमेय संख्या आहेत. $\frac{2}{7}+\frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$

आलेले उत्तर $\frac{51}{56}$ हे पुन्हा परिमेय संख्या आहे.

$8+\left(\frac{-19}{2}\right) =$ _____ हे परिमेय संख्या आहे का ?

$\frac{2}{7} + \frac{-2}{7} =$ ___ तुम्हाला परिमेय संख्या मिळाली ?

खालील जोड्या मध्ये अजुन काही तपासणी करा.

$3+\frac{5}{7}$, $0+\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}+\frac{2}{7}$

आपल्याला असे लक्षात आले की, दोन परिमेय संख्याची बेरीज पुन्हा परिमेय संख्याच आहे. म्हणुन बेरजे मध्ये परिमेय संख्या संवृत्त आहे. कोणत्याही दोन a आणि b परिमेय संख्यासाठी (a + b) हे परिमेय संख्याच असते. म्हणजेच $\forall a, b \in Q$; $(a + b) \in Q$.

> $\in$ च्याशी संबंधी आहे $\forall$ सर्वा साठी
>
> समजा $A = \{1, 2, 3\}$
>
> 3 हा घटक A मध्ये आहे आणि ते दर्शविते $3 \in A$ आणि आपण त्याला 3 हा A शी संबंधीत आहे असे वाचतो.
>
> निरिक्षण करा $x = 1 \Rightarrow 1 + 0 = 1$
>
> $x = 2 \Rightarrow 2 + 0 = 2$
>
> $x = 3 \Rightarrow 3 + 0 = 3$
>
> म्हणजे सर्व $x \in A$ तर आपल्याला $x + 0 = x$. याला आपण असे दर्शवितो की, $x + 0 = x$ $\forall x \in A$.याला आपण याला सर्वा साठी म्हणुन वाचतो. $x \in A; x + 0 = x$.

(b) वजाबाकी:

समजा $\frac{5}{9}$ आणि $\frac{3}{4}$ या दोन परिमेय संख्या आहेत.

तर $\frac{5}{9}-\frac{3}{4} = \frac{5\times4-3\times9}{36} = \frac{20-27}{36} = \frac{-7}{36}$

पुन्हा आपल्याला $\frac{-7}{36}$ ही परिमेय संख्या मिळाली (कारण –7, 36 हे पुर्णांक आहेत आणि 36 हे शुन्य नाही आहे. म्हणुन $\frac{-7}{36}$ हे परिमेय संख्या आहे.).

खालील पुर्ण संख्यांना सुध्दा या साठी तपासणी करा.

(i) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} =$ _____ हे परिमेय संख्या आहे का ?

(ii) $\left(\frac{48}{9}\right)-\frac{11}{18} =$ _____ हे परिमेय संख्या आहे का ?

कोणत्याही दोन परिमेय संख्यासाठी, त्यांचा फरक सुध्दा परिमेय संख्याच आहे असे आपण माहित केलो. म्हणुन वजाबाकी मध्ये परिमेय संख्या कोणत्याही दोन a आणि b परिमेय संख्या साठी a–b हे परिमेय संख्याच असते म्णजेच $\forall$ a, b $\in$ Q, (a–b) $\in$Q

SCERT TELANGANA

(c) गुणाकार

खालील चे निरिक्षण करा.

$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{5} \times \frac{-11}{2} = \frac{-66}{10} = \frac{-33}{5}$

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} =$ _____ ; $\frac{2}{1} \times \frac{19}{13} =$ _____

वरील सर्व संदर्भात आपल्याला असे लक्षात येऊ शकते की, दोन परिमेय संख्याचा गुणाकार परिमेय संख्याच असते. आणखी काही परिमेय संख्याच्या जोड्या साठी प्रयत्न करा आणि तपासणी करा की त्याच्या गुणाकार परिमेय संख्या आहे किंवा नाही. अशा दोन परिमेय संख्या तुम्ही माहित करु शकता का ज्याचा गुणाकार परिमेय संख्या नाही.

गुणाकारामध्ये परिमेय संख्या संवृत्त असतात हे आपण माहित केलो आहोत.

कोणत्याही दोन परिमेय संख्या a आणि b साठी $a \times b$ हे परिमेय संख्या आहे. $\forall a, b \in Q, a \times b \in Q$

(d) भागाकार

खालील दोन परिमेय संख्या चे निरिक्षण करा.

$\frac{2}{3}, \frac{7}{8}$ समजा $\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$ हे परिमय संख्या आहेत. कोणते परिमेय संख्या आहे.?

अजुन दोन उदाहरणासाठी याची तपासणी करा.

$\frac{5}{7} \div 2 = \frac{5}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

$-\frac{2}{3} \div \frac{6}{11} =$ _____ = _____ = _____

$3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} =$ _____ = _____ = _____

वरील सर्वा वरुन आपल्याला असे लक्षात आले कि, जर आपण दोन परिमेय संख्याचा भागाकार केला तर आपल्याला परिमेय संख्या मिळते. आता आपण असे म्हणु शकतो का, भागाकारा मध्ये परिमेय संख्या संवृत्त असतात. ?

खालीलची तपासणी करु या: 0, 5 ही परिमेय संख्या आहेत आणि $\frac{5}{0}$ ची संख्या करता येत नाही. पुर्ण संख्याचा समुह Q हे भागाकार मध्ये संवृत्त नाही.

म्हणुन आपण असे म्हणु शकतो कि, जर आपण Q मधुन 0 काढुन टाकला तर ते भागाकार मध्ये संवृत्त होते.

$\frac{5}{0}$ ची व्यख्या का करता येत नाही ?5 ÷ 0 भागाकार करा 0) 5 ? तुम्ही भागाकार पुर्ण करु शकता का?भागाकार काय आहे? एखाद्या संख्याला '0' ने गुणाकार केले असता उत्तर'0'हे तुम्ही पाहिलेच असाल.म्हणुन भागाकार हे शुन्य नाही आहे.

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करा

जर आपण पुर्णांकाच्या संचामधुन शुन्य वगळला तर ते भागाकार मध्ये संवृत्त होत का ?

नैसर्गिक संख्या साठी अशीच तपासणी करा.

हे करा

तक्त्या मधील रिकाम्या जागा भरा

संख्या	संवृत्ताचा गुणधर्म			
	बेरीज	वजाबाकी	गुणाकार	भागाकार
नैसर्गिक संख्या	होय	—	—	—
पुर्ण संख्या	—	—	—	नाही
पुर्णांक	—	होय	—	—
परिमेय संख्या	—	—	होय	—

1.2.2. क्रमनिरपेक्षतेचा गुणधर्म :

पुर्ण संख्या आणि पुर्णांक या दोन्ही साठी वेगवेगळ्या क्रिया करुन क्रम निरपेक्षतेचा गुणधर्माची उजळणी करु या.

खालील तक्ता पुर्ण करा.

दोन संख्याच्या क्रमामध्ये बदल करुन व्दिसंख्यामान क्रिया केल्यानंतर ही त्याच्या उत्तरामध्ये बदल होत नसते. यालाच क्रमनिरपेक्षताचा गुणधर्म म्हणतात.

$a + b = b + a$

$a \times b = b \times a$

येथे व्दिसंख्यामान क्रिया म्हणजे चार मुलभुत क्रिया जसे +, –, ×, ÷ पैकी एक

(i) पुर्ण संख्या

क्रिया	उदाहरण	शेरा
बेरीज	2, 3 हे पुर्ण संख्या आहेत. 2+3 = 5 आणि 3 + 2 = 5 ∴ 2 + 3 = 3 + 2	बेरजे मध्ये W हे क्रमनिरपेक्ष आहे.
वजाबाकी	3 – 2 हे 2 –3च्या बरोबर आहे का?	वजाबाकी हे क्रमनिरेपक्ष नाही आहे.
गुणाकार	------	------
भागाकार	4 ÷ 2 = ? 2 ÷ 4 = ? 4 ÷ 2 = 2 ÷ 4 आहे का ?	-------

SCERT TELANGANA

(ii) पुर्णांक

क्रिया	उदाहरण	शेरा
बेरीज	---	बेरजेमध्ये पुर्णांक क्रमनिरपेक्ष आहे.
वजाबाकी	2, 3 पुर्णांक आहेत $2-(3)=?$ $(3)-2=?$ $2-(3)=(3)-2=$ आहे का?	.....
गुणाकार	... ...	... ...
भागाकार	... ...	भागाकारा मध्ये पुर्णांक हे क्रमनिरपेक्ष नाही आहे.

(iii) परिमेय संख्या

(a) बेरीज

दोन परिमेय $\frac{5}{2}$, $\frac{-3}{4}$ घ्या आणि त्यांची बेरीज करा.

$$\frac{5}{2}+\frac{(-3)}{4} = \frac{2\times5+1\times(-3)}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

आणि $\frac{(-3)}{4}+\frac{5}{2} = \frac{1\times(-3)+2\times5}{4} = \frac{-3+10}{4} = \frac{7}{4}$

म्हणुन $\frac{5}{2}+\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4}+\frac{5}{2}$

परिमेय संख्याच्या इतर काही जोड्यासाठी हा नियम तपासुन पहा.

$\frac{1}{2}+\frac{5}{7}$ आणि $\frac{5}{7}+\frac{1}{2}$ साठी, $\frac{1}{2}+\frac{5}{7} = \frac{5}{7}+\frac{1}{2}$ होते का ?

$\frac{-2}{3}+\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{(-4)}{5}+\left(\frac{-2}{3}\right)$?होते का ?

अशा परिमेय संख्याच्या जोड्या तुम्ही माहित करु शकता का ज्यांची बेरीज बदलते जेव्हा आपण त्यांचा क्रम बदलतो ? a आणि b.दोन परिमेय संख्यासाठी आपण $a+b=b+a$ म्हणु शकतो. म्हणुन बेरजे मध्ये परिमेय संख्याचा संच क्रमनिरपेक्ष आहे.

$\therefore\ \forall\ a, b \in Q,\ a+b=b+a$

SCERT TELANGANA

(b) **वजाबाकी:** $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{7}{8}$ या दोन परिमेय संख्या घ्या.

$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24}$ आणि $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$

म्हणुन $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

खालील विधान तपासा.

$2 - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - 2$ आहे का ? $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ आहे का ?

म्हणुन आपण असे म्हणु शकतो की, वजाबाकी मध्ये परिमेय संख्याचा संच हा क्रमनिरपेक्ष नाही आहे. a आणि b या दोन परिमेय संख्या साठी $a - b \neq b - a$

(c) **गुणाकार :** $2, -\frac{5}{7}$ या दोन परिमेय संख्या घ्या.

$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7}$; $\frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7}$ म्हणुन $2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$

$\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$ आहे का ?

अजुन काही परिमेय संख्या साठी तपासणी करा.

आपण असा निष्कर्ष काढु शकतो की, गुणाकारामध्ये परिमेय संख्याचा संच क्रमनिरपेक्ष आहे. याचा अर्थ, a आणि b दोन परिमेय संख्यासाठी $a \times b = b \times a$

म्हणजेच $\forall\, a, b \in Q,\ a \times b = b \times a$

(d) **भागाकार**

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$ आहे का ?

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} x \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} = \frac{3}{2}$ आणि $\frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{2}{3}$

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$

म्हणुन आपण असे म्हणु शकतो की, भागाकारामध्ये परिमेय संख्या क्रमनिरपेक्ष नाही आहे.

SCERT TELANGANA

हे करा:

खालील तक्ता पुर्ण करा.

संख्या	क्रमनिरपेक्ष			
	बेरीज	वजाबाकी	गुणाकार	भागाकार
नैसर्गिक संख्या	होय	नाही	होय	—
पुर्ण संख्या	—	—	—	नाही
पुर्णांक	—	—	—	—
परिमेय संख्या	—	—	—	नाही

1.2.3 साहचर्यचा गुणधर्म

बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार या चार क्रियावर आधारीत पुर्ण संख्या साठी साहचर्य गुणधर्माची उजळणी करु.

जर तुम्ही तीन संख्यानी बेरीज करीत असाल तर तुम्ही सुरवातीला पहिल्या दोन संख्यांची बेरीज करुन त्यामुध्ये नंतरची संख्या मिळवली असता येणारा उत्तर हे नंतरच्या दोन संख्या ची सुरुवातीला बेरीज करुन त्या मध्ये पहिली संख्या मिळवली असता येणाऱ्या उत्तरा एवढा असतो यालाच बेरजे मध्ये साहचर्याचा गुणधर्म म्हणतात. म्हणजेच $(3+2)+5$ किंवा $3+(2+5)$.

(i) पुर्ण संख्या

आवश्यक सोडवणीकी आणि शेरा व्दारा खालील तक्ता पुर्ण करा.

क्रिया	पुर्ण संख्याचे उदाहरणे	शेरा
बेरीज	$2+(3+0)=(2+3)+0$ आहे का ? $2+(3+0)=2+3=5$ $(2+3)+0=5+0=5$ $\Rightarrow 2+(3+0)=(2+3)+0$ $a+(b+c)=(a+b)+c$ कोणत्याही तीन पुर्ण संख्या a, b, c साठी	
वजाबाकी	$(2-3)-2=?$ $2-(3-2)=$ आहे का ? $(2-3)-2 = 2-(3-2)$ आहे का?	वजाबाकी मध्ये साहचर्य नाही आहे.
गुणाकार	-	गुणाकार मध्ये साहचर्य आहे.
भागाकार	$2\div(3\div5)=(2\div3)\div5$ आहे का ? $2\div(3\div5)=2\div\frac{3}{5}=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$ $(2\div3)\div5=\frac{2}{3}\div5=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ $2\div(3\div5)\neq(2\div3)\div5$	भागाकारामध्ये साहचर्य नाही.

SCERT TELANGANA

(ii) पुर्णांक

चार क्रिया मध्ये पुर्णांकासाठी साहचर्याची उजळणी करु.

आवश्यक असलेल्या शेरा व्दारे खालील तक्ता पुर्ण करा.

क्रिया	पुर्णांकाचे उदाहरण	शेरा
बेरीज	$2 + [(-3) + 5)] = [(2 + (-3)] + 5$ आहे का ? $2+[(-3)+5]=2+[-3+5]=2+2=4$ $[2+(-3)]+5=[2-3]+5=-1+5=4$ कोणत्याही तीन a, b, c पुर्णांकासाठी $a + (b + c) = (a + b) + c$	
वजाबाकी	$6 - (9 - 5) = (6 - 9) - 5$ आहे का ?	
गुणाकार	$2\times[7\times(-3)] = (2\times7)\times(-3)$ आहे का ?	
भागाकार	$10 \div [2 \div (-5)] = [10 \div 2] \div (-5)$? $10 \div [2 \div (-5)] = 10 \div \frac{-2}{5} = 10 \times \frac{-5}{2} = -25$ आता, $(10 \div 2) \div (-5) = \frac{10}{2} \div -5 = 5 \div -5 = \frac{5}{-5} = -1$ या प्रकारे $10 \div [2 \div (-5)] \neq [10 \div 2] \div (-5)$	

(iii) परिमेय संख्या - साहचर्य

(a) बेरीज

$\frac{2}{7}, 5, \frac{1}{2}$ या तीन परिमेय संख्याचा विचार करु आणि पडताळणी करु.

$$\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)$$

डावी बाजु= $\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{7}+\left[5+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{7}+\left[\frac{10+1}{2}\right]=\frac{4+77}{14}=\frac{81}{14}$

उजवी बाजु = $\left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{2+35}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{37}{7}+\frac{1}{2}=\frac{74+7}{14}=\frac{81}{14}$

डावी बाजु = उजवी बाजु

SCERT TELANGANA

$\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{4}{3}\right)\right]$ आणि $\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)$

माहित करा या दोन्हीची बेरीज सारखीच आहे का ?

अजुन काही परिमेय संख्या घ्या आणि साहचर्याला पडताळ करा.

बेरजेमध्ये परिमेय संख्या साहचर्य असतात असे आपण माहित केलो.

$a+(b+c) = (a+b)+c$ कोणत्याही तीन a, b आणि c परिमेय संख्या साठी

म्हणजेच $\forall\ a, b, c \in Q,\ \ a+(b+c)=(a+b)+c$

(b) वजाबाकी

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ आणि $\frac{-5}{4}$ तीन परिमेय संख्या घ्या.

पडताळा करा $\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right]-\left(\frac{-5}{4}\right)$

डावी बाजु $=\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right]=\frac{1}{2}-\left[\frac{8}{4}\right]$

$$=\frac{1}{2}-2=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

उजवी बाजु $=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right) = \left(\frac{1\times 2-3}{4}\right)+\frac{5}{4}=\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{5}{4}$

$$=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\therefore \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right]\neq\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right)$$

डावी बाजु $\neq$ उजवी बाजु

वजाबाकी मध्ये परिमेय संख्याचा संच साहचर्य नसतो. म्हणुन कोणत्याही तीन a, b, c परिमेय संख्येसाठी $a-(b-c)\neq(a-b)-c$

(c) गुणाकार

$\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{-5}{7}$ तीन परिमेय संख्या घ्या.

$\frac{2}{3}\times\left[\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{7}\right)\right]=\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{-5}{7}\right)$ आहे का ?

डावी बाजु $=\frac{2}{3}\times\left[\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{7}\right)\right]=\frac{2}{3}\left[\frac{-20}{49}\right]=\frac{-40}{147}$

SCERT TELANGANA

उजवी बाजु $= \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$

डावी बाजु = उजवी बाजु

खालील विधाने तपासा.

$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right)$ आणि $\left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$ माहित करा.

$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$ आहे का ?

$\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right)$ आणि $\left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$ माहित करा

$\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$ आहे का ?

वरील तीन संदर्भात आपण माहित केलो की, डावी बाजु = उजवी बाजु

गुणाकारामध्ये परिमेय संख्या साहचर्य असतात.

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ कोणत्याही तीन परिमेय संख्या a, b, c. साठी

म्हणजेच $\forall\ a, b, c \in Q,\ \ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(d) भागाकार

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ and $\frac{1}{7}$ या तीन परिमेय संख्या घ्या.

$\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$? आहे का.

डावी बाजु = $\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3} \div \frac{21}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{8}{63}$

उजवी बाजु = $\left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right) \div \frac{1}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{1} = \frac{56}{9}$

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$$

डावी बाजु ≠ उजवी बाजु

म्हणुन $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ कोणत्याही तीन a, b, c परिमेय संख्या साठी,

म्हणुन भागाकारामध्ये परिमेय संख्या साहचर्य नसतात.

SCERT TELANGANA

हे करा

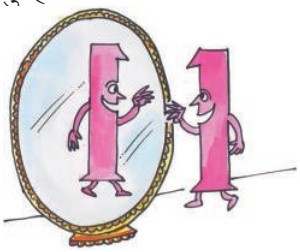
खालील तक्ता पुर्ण करा.

संख्या	साहचर्या मध्ये			
	बेरीज	वजाबाकी	गुणाकार	भागाकार
नैसर्गिक संख्या	होय	नाही	—	—
पुर्ण संख्या	—	—	—	नाही
पुर्णांक	—	नाही	होय	—
परिमेय संख्या	—	—	—	—

1.2.4 शुन्याचे स्थान

तुम्ही अशा संख्या शोधु शकता का की ज्या संख्येमध्ये $\frac{1}{2}$ मिळविले असता पुन्हा तीच $\frac{1}{2}$ संख्या मिळते ?

जेव्हा **0** ही संख्या कोणत्याही परिमेय संख्या मध्ये मिळविली असता पुन्हा तीच परिमेय संख्या मिळते उदाहरणार्थ



$1 + 0 = 1$ आणि $0 + 1 = 1$

$-2 + 0 = -2$ आणि $0 + (-2) = -2$

$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ आणि $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

म्हणुन या कारणासाठी आपण शुन्याला बेरजेचा अविकारक घटक किंवा बेरजेचा आविकारक म्हणतो. हा गुणधर्म खालील प्रमाणे आहे.

जर **a** ही कोणतीही परिमेय संख्या असेल तर $a + 0 = a$ आणि $0 + a = a$

नैसर्गिक संख्याच्या संचाला बेरजेचा अविकारक आहे का ?

1.2.5 1 चे स्थान

खालील रिकाम्या जागा भरा.

$3 \times \square = 3$ आणि $\square \times 3 = 3$

$-2 \times \square = -2$ आणि $\square \times -2 = -2$

$\frac{7}{8} \times \square = \frac{7}{8}$ आणि $\square \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

वरील गुणाकारात तुम्ही काय निरिक्षण केले ?

SCERT TELANGANA

जेव्हा तुम्ही एखाद्या परिमेय संख्येला 1 ने गुणता तेव्हा तुम्हाला पुन्हा तीच परिमेय संख्या मिळते असे तुम्हाला दिसुन येते.म्हणुन आपण असे म्हणु शकतो की, परिमेय संख्या साठी 1 हा गुणाकाराचा अविकारक आहे.

पुर्ण संख्या आणि पुर्णांकासाठी गुणाकाराचा अविकारक कोणता आहे.?

अविकारक गुणधर्माची वास्तविकता माहित न करता आपण त्याचा वापर वारंवार करत आहोत.

उदा. जेव्हा आपण $\frac{15}{50}$ ला साध्या रुपात लिहायचे असते. तेव्हा आपण खालील प्रमाणे लिहितो.

$$\frac{15}{50} = \frac{3\times5}{10\times5} = \frac{3}{10}\times\frac{5}{5} = \frac{3}{10}\times1 = \frac{3}{10}$$

जेव्हा आपण असे लिहितो $\frac{3}{10}\times1 = \frac{3}{10}$. आपण गुणाकारामध्ये अविकारक गुणधर्माचा वापर केला आहे.

1.2.6 व्यस्ताचे अस्तीत्व

(i) बेरजेचा व्यस्त

$3+(-3) = 0$ आणि $-3+3 = 0$

$-5 + 5 = 0$ आणि $5+(-5) =$ _____

$\frac{2}{3} + ? = 0$ आणि ____ $+ \frac{2}{3} =$ _____?

$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0$ आणि $? + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

येथे - 3 आणि 3 ला एकमेकांना बेरजेचा व्यस्त म्हटल्या जाते कारण त्यांची बेरीज केल्या नंतर उत्तर 0 येते. ज्या दोन संख्यांची बेरीज 0 येते त्या दोन संख्या एकमेकांचे व्यस्त आहेत. जर **a** ही एक परिमेय संख्या असेल तर **a + (–a) = 0** आणि **(–a) + a = 0**

तर 'a' आणि '–a' एकमेकांचे बेरजेचे व्यस्त आहेत.

0 चा बेरजेचा व्यस्त 0 आहे कारण $0+0=0$.

(ii) गुणाकाराचा व्यस्त

अशा कोणत्या परिमेय संख्येला $\frac{2}{7}$ ने गुणले असता गुणाकार 1 येते ?

आपण असे पाहु शकतो की, $\frac{2}{7}\times\frac{7}{2} = 1$ आणि $\frac{7}{2}\times\frac{2}{7} = 1$

SCERT TELANGANA

खालील डब्बे भरा.

$2 \times \square = 1$ आणि $\square \times 2 = 1$

$-5 \times \square = 1$ आणि $\square \times 5 = 1$

$\frac{-17}{19} \times \square = 1$ आणि $\square \times \frac{-17}{19} = 1$

$1 \times ? = 1$

$-1 \times ? = 1$

ज्या दोन संख्याचा गुणाकार 1 येतो त्या संख्यांना एकमेकांच्या गुणाकाराचे व्यस्त म्हणतो.

उदा. कारण $4 \times \frac{1}{4} = 1$ आणि $\frac{1}{4} \times 4 = 1$, म्हणुन 4 आणि $\frac{1}{4}$ हे एकमेकांचे गुणाकाराचे व्यस्त आहेत.

जर $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ असेल तर आपण असे म्हणु शकतो की, $\frac{c}{d}$ ही परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ या परिमेय संख्याचा गुणाकार व्यस्त आहे.

विचार करा-चर्चा करा आणि लिहा.

1. परिमेय संख्या साठी बेरजेमध्ये एखादा गुणधर्म लागु होत असेल तर ते गुणधर्म पुर्णांकासाठी सुध्दा लागु होते का ? आणि तसेच पुर्ण संख्यासाठी कोणता गुणधर्म लागु होते? आणि कोणता नाही होत?
2. ज्या संख्याचा गुणाकार व्यस्त तीच संख्या असते. अशा संख्या लिहा.
3. शुन्याचे व्यस्त तुम्ही माहित करु शकता का ? जेव्हा एखाद्या संख्येला 0 ने गुणले असता उत्तर 1 येते अशी कोणती तरी परिमेय संख्या आहे का.?

$\square \times 0 = 1$ किंवा $0 \times \square = 1$ --------?

1.3 गुणाकाराचा बेरजे वर वितरण

$\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ या तीन परिमेय संख्या घ्या.

पडताळा करु या $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$

SCERT TELANGANA

डावी बाजु $= \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{2+3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

उजवी बाजु $= \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{10} + \frac{6}{20} = \frac{4+6}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

डावी बाजु = उजवी बाजु

अशा प्रकारे $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$

या गुणधर्माला गुणाकाराचा बेरजे वर वितरणाचा नियम म्हणतात.

आता, खालील चा पडताळ करा.

$\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)$ आहे का ?

तुम्ही काय निरिक्षण केले ? डावी बाजु = उजवी बाजु होते का ?

या गुणधर्माला वजाबाकी वर वितरणाचा नियम म्हटल्या जाते. आणखी काही परिमेय संख्याच्या जोड्या घ्या आणि वितरणाचा गुणधर्माचा पडताळ करा.

प्रयत्न करा: वितरणाचा वापर करुन महित करा.

(1) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{10}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{9}{10}\right\}$

(2) $\left\{\frac{9}{16} \times 3\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times -19\right\}$

a, b आणि c या सर्व परिमेय संख्या साठी आपण असे म्हणु शकतो का -

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

हे करा.

खालील तक्ता पुर्ण करा

संख्या	बेरजेचा गुणधर्म				
	संवृत्त	क्रमनिरपेक्ष	साहचर्य	अविकारकाचे अस्तीत्व	व्यस्ताचे अस्तीत्व
परिमेय संख्या	होय	—	—	—	—
पुर्णांक	होय	—	—	—	—
पुर्ण संख्या	—	—	—	होय	नाही
नैसर्गिक संख्या	होय	—	—	—	—

SCERT TELANGANA

खालील तक्ता पुर्ण करा					
संख्या	गुणाकाराचा गुणधर्म				
	संवृत्त	क्रमनिरपेक्ष	साहचर्य	अविकारकाचे अस्तीत्व	व्यस्ताचे अस्तीत्व
परिमेय संख्या	होय	—	—	—	—
पुर्णांक	—	होय	—	—	—
पुर्ण संख्या	—	—	होय	—	—
नैसर्गिक संख्या	—	—	—	होय	—

उदाहरण 1. सरळ रुपात द्या. $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)$

सोडवणुक: सारखे छेद असलेल्या अपुर्णांकास एकत्र ठेऊन दिलेल्या अपुर्णांकाची रचना करु.

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{6}{5}-\frac{13}{7}$$

$$=\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}-\frac{13}{7}\right)$$ (बेरजेच्या क्रमनिरपेक्षतेच्या नियमानुसार)

$$=\frac{2-6}{5}+\frac{3-13}{7}$$

$$=\frac{-4}{5}+\frac{-10}{7}=\frac{-4}{5}-\frac{10}{7}$$

$$=\frac{-4\times7-10\times5}{35}=\frac{-28-50}{35}=\frac{-78}{35}$$

उदाहरण 2: खालील परिमेय संख्याचा बेरजेचा व्यस्त लिहा.

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-11}{5}$ (iii) $\frac{7}{-13}$ (iv) $\frac{-2}{-3}$

सोडवणुक : (i) $\frac{2}{7}$ चा बेरजेचा व्यस्त $\frac{-2}{7}$ आहे.

कारण $\frac{2}{7}+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{2-2}{7}=0$

SCERT TELANGANA

(ii) $\frac{-11}{5}$ चा बेरजेचा व्यस्त $-\left(\frac{-11}{5}\right) = \frac{11}{5}$

(iii) $\frac{7}{-13}$ या बेरजेचा व्यस्त $-\left(\frac{7}{-13}\right) = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$

(iv) $\frac{-2}{-3}$ चा बेरजेचा व्यस्त $-\left(\frac{\cancel{-}2}{\cancel{-}3}\right) = -\frac{2}{3}$

उदाहरण 3 : $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$ माहित करा

सोडवणुक: $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

(बेरजेच्या क्रमनिरपेक्षतेच्या नियमानुसार)

$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-1}{9}\right) + \left(\frac{-1}{9}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

$= \frac{-1}{9}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{23}{180}$ (वितरणाच्या नियमानुसार)

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{8+15}{20}\right) + \frac{23}{180}$

$= -\frac{1}{9}\left(\frac{23}{20}\right) + \frac{23}{180} = \frac{-23}{180} + \frac{23}{180} = 0$ (बेरजेच्या व्यस्ताच्या नियमानुसार)

उदाहरण 4: $\frac{-9}{2}$ आणि0 $\frac{5}{18}$ च्यां व्यस्ताचा गुणाकार माहित करुन त्यामध्ये $\left(\frac{-4}{5}\right)$ चा बेरजेचे व्यस्त मिळविला तर उत्तर काय मिळते.?

सोडवणुक : $\frac{-9}{2}$ चा व्यस्त $\frac{-2}{9}$ आहे.

$\frac{5}{18}$ चा व्यस्त $\frac{18}{5}$ आहे.

व्यस्ताचा गुणाकार $= \frac{-2}{\cancel{9}_{1}} \times \frac{\cancel{18}^{2}}{5} = \frac{-4}{5}$

SCERT TELANGANA

$\left(\frac{-4}{5}\right)$ चा बेरजेचा व्यस्त $\frac{4}{5}$ आहे

अशा प्रकारे गुणाकार + बेरजेचा व्यस्त = $\frac{-4}{5}+\frac{4}{5}=0$ (व्यस्त गुणधर्म)

अभ्यास - 1.1

1. खालील उदाहरणामध्ये दर्शविलेले गुणधर्म लिहा.

(i) $\frac{8}{5}+0=\frac{8}{5}=0+\frac{8}{5}$

(ii) $2\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{3}{5}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\frac{3}{7}\times 1=\frac{3}{7}=1\times\frac{3}{7}$

(iv) $\left(\frac{-2}{5}\right)\times 1=\frac{-2}{5}=1\times\left(\frac{-2}{5}\right)$

(v) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

(vi) $\frac{5}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{14}$

(vii) $7a+(-7a) = 0$

(viii) $x\times\frac{1}{x}=1$ $(x\neq 0)$

(ix) $(2\times x)+(2\times 6) = 2\times(x+6)$

2. खालीलचे बेरजेचा आणि गुणाकाराचा व्यस्त लिहा.

(i) $\frac{-3}{5}$ (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{7}{9}$ (v) -1

3. रिकाम्या जागा भरा.

(i) $\left(\frac{-1}{17}\right)+(____)=\left(\frac{-12}{5}\right)+\left(\frac{-1}{17}\right)$

(ii) $\frac{-2}{3}+____=\frac{-2}{3}$

(iii) $1\times____=\frac{9}{11}$

(iv) $-12+\left(\frac{5}{6}+\frac{6}{7}\right)=\left(-12+\frac{5}{6}\right)+(____)$

(v) $(____)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times____\right)$

(vi) $\frac{-16}{7}+____=\frac{-16}{7}$

SCERT TELANGANA

4. $\frac{2}{11}$ ला $\frac{-5}{14}$ च्या व्यस्त ने गुणाकार करा.

5. $\frac{2}{5}\times\left(5\times\frac{7}{6}\right)+\frac{1}{3}\times\left(3\times\frac{4}{11}\right)$ हे सोडविण्यासाठी कोणत्या गुणधर्माचा वापर करु शकतो.

6. खालील पडताळ करा.

$$\left(\frac{5}{4}+\frac{-1}{2}\right)+\frac{-3}{2}=\frac{5}{4}+\left(\frac{-1}{2}+\frac{-3}{2}\right)$$

7. $\frac{3}{5}+\frac{7}{3}+\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)$ याची पुर्नरचना करुन सोडवा.

8. **वजाबाकी करा.**

(i) $\frac{3}{4}$ मधुन $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{-32}{13}$ मधुन 2 (iii) -7 मधुन $\frac{-4}{7}$

9. $\frac{-5}{8}$ मध्ये कोणती संख्या मिळवली तर $\frac{-3}{2}$ येते ?

10. दोन परिमेय संख्याची बेरीज 8 आहे. जर त्यातील एक संख्या $\frac{-5}{6}$ आहे तर दुसरी माहित करा.

11. वजाबाकी मध्ये परिमेय संख्या साहचर्य आहेत का ? स्पष्ट करा.

12. $-(-x)=x$ साठी पडताळा करा.

(i) $x=\frac{2}{15}$ (ii) $x=\frac{-13}{17}$

13. लिहा -

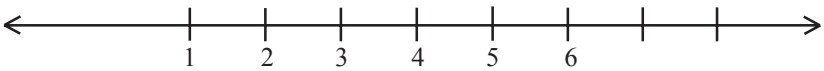
(i) बेरजेचा अविकारक नसलेल्या संख्याचा संच

(ii) व्यस्त नसलेली परिमेय संख्या

(iii) ऋण परिमेय संख्याचा व्यस्त

1.4 परिमेय संख्याना संख्या रेषेवर दर्शविणे.

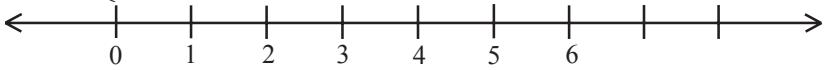
गायत्रीने एक संख्या रेषा काढली आणि त्यावर संख्याची खुण केली.



संख्या रेषेवर कोणत्या संख्याच्या संचाची खुण केलेली आहे.?

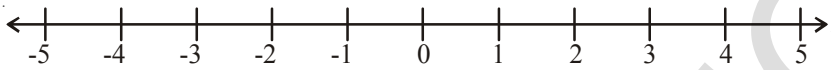
SCERT TELANGANA

सुजाता म्हणाली, " त्या नैसर्गिक संख्या आहेत." परमेश म्हणाला, "त्या परिमेय संख्या आहेत" तुम्ही कोणाचे म्हणने मान्य कराल?



संख्या रेषेवर कोणत्या संख्याच्या संचाची खुण केलेली आहे.?

त्या पुर्ण संख्या आहेत का परिमेय संख्या आहेत ?



या रेषेवर कोणत्या संख्याच्या संचाची खुण केलेली आहे.?

वरील रेषेवर तुम्ही –5 आणि 3 मधील संख्या माहित करु शकता का ?

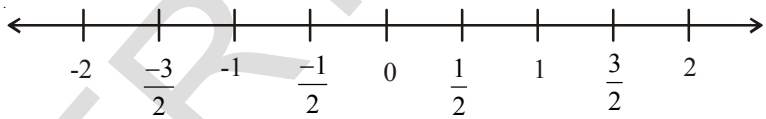
वरील रेषेवर तुम्ही 0 आणि 1 किंवा –1 आणि 0 या मध्ये एखादी संख्या पाहु शकता का?

0 आणि 1 च्या मध्यभागी $\frac{1}{2}$ ही संख्या आहे.

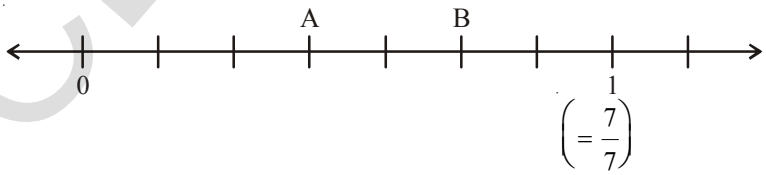
1 आणि 2 च्या मध्यभागी $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 0 आणि –1 च्या मध्यभागी $-\frac{1}{2}$,

– 1आणि –2 च्या मध्यभागी $-1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

संख्या रेषेवर या परिमेय संख्याला खालील प्रमाणे दर्शवु शकता.



उदाहरण 5: खालील संख्या रेषेवर A आणि B खुण केलेल्या ठिकाणी कोणती परिमेय संख्या आहे ते ओळखा



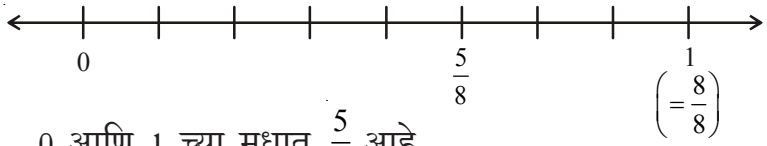
सोडवणुक: येथे 0 ते 1 या एका भागात 7 सारख्या भागाची विभागणी केलेली आहे. 7 भागापैकी 3 रा भाग A दर्शवित आहे. म्हणुन A च्या ठिकाणी $\frac{3}{7}$. आणि B ठिकाणी $\frac{5}{7}$.

संख्या रेषेवर कोणतीही परिमेय संख्या दर्शवु शकतो. परिमेय संख्यातील छेद म्हणजे प्रत्येक भागातील विभागलेल्या सारख्या भागाची संख्या होय हे लक्षात येते. अंश म्हणजे त्यामधील कितवा भाग म्हणुन समजायचा

SCERT TELANGANA

उदाहरण 6: संख्यारेषेवर $\frac{5}{8}$ ला दर्शवा

सोडवणुक:



0 आणि 1 च्या मधात $\frac{5}{8}$ आहे

म्हणुन संख्या रेषेला $\frac{5}{8}$ हा छेदाधिक अपुर्णांक 0 आणि 1 च्या मधात सारख्या 8 भागात (छेद) विभागा. $\frac{5}{8}$ या पाहिजे असलेल्या परिमेय संख्यासाठी 0 पासुन 5 व्या भागावर (अंश) $\frac{5}{8}$. म्हणुन खुण करा

उदाहरण 7: संख्या रेषेवर $\frac{29}{6}$ दर्शवा

सोडवणुक:

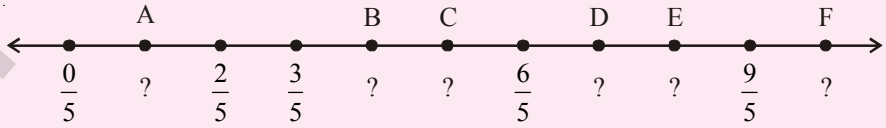
$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6} = 4+\frac{5}{6}$. हे संख्या रेषेवर 4 आणि 5 च्या मधात आहे. संख्या रेषेला 4 आणि 5 च्या मधात सारख्या 6 भागात (छेद) विभागा.

4 पासुन 5 व्या भागावर (परिमेयचा अंश) खुण करा.

$\frac{29}{6}$ पाहिजे असलेल्या परिमेय संख्याचे स्थान हे आहे.

प्रयत्न करा

संख्यारेषेवर अक्षरानी खुण केलेल्या बिंदुसाठी परिमेय संख्या लिहा.



(i) $\frac{0}{5}$? $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$? ? $\frac{6}{5}$? ? $\frac{9}{5}$?

(ii) $\frac{-7}{4}$? ? -1 ? $\frac{-2}{4}$? 0

हे करा.

(i) संख्या रेषेवर $-\frac{13}{5}$ दर्शवा

SCERT TELANGANA

1.5 दोन परिमेय संख्या मधील परिमेय संख्या

खालील चे निरिक्षण करा.

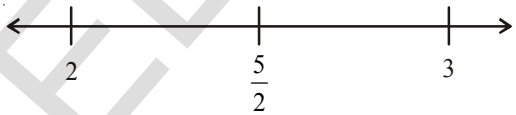
1 आणि 5 मधील नैसर्गिक संख्या 4,3,2 आहेत.

1 आणि 2 च्या मधात कोणता तरी नैसर्गिक संख्या आहे का ?

–4 आणि 3 मधील पुर्णांक –3, –2, –1, 0, 1, 2. आहेत. –2 आणि–1च्या मधील पुर्णांक लिहा.? दोन लागोपाट येणाऱ्या पुर्णांकाच्या मधात आपण अजुन पुर्णांक माहित करु शकत नाही.पण कोणत्याही लागोपाट येणाऱ्या दोन पुर्णांकाच्या मधात आपण परिमेय संख्या लिहु शकतो.

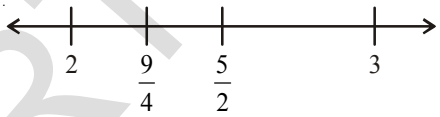
2 आणि 3 मधील परिमेय संख्या लिहु या.

जर a आणि b हे दोन परिमेय संख्या असेल तर $\frac{a+b}{2}$ (याला आपण a आणि bची सरासरी सुध्दा म्हणु शकतो.) ही त्यामधील परिमेय संख्या होय. म्हणुन $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$ हे 2 आणि 3 मधील परिमेय संख्या होय.अशा प्रकारे $2<\frac{5}{2}<3$.



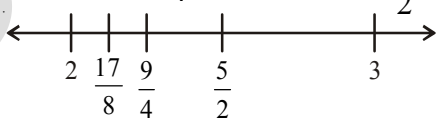
आता, 2 आणि $\frac{5}{2}$ मधील परिमेय संख्या हे $\frac{2+\frac{5}{2}}{2}=\frac{\frac{9}{2}}{2}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$ आहे.

अशा प्रकारे



$$2<\frac{9}{4}<\frac{5}{2}<3$$

पुन्हा 2 आणि $\frac{9}{4}$ ची सरासरी $\frac{2+\frac{9}{4}}{2}=\frac{\frac{17}{4}}{2}=\frac{17}{8}$



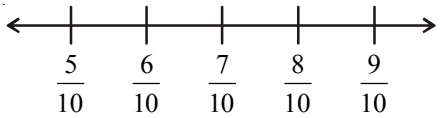
म्हणुन $2<\frac{17}{8}<\frac{9}{4}<\frac{5}{2}<3$ या प्रकारे कोणत्याही दोन संख्या मध्ये आपण संख्या ठेवत पुढे जाऊ शकतो. तसे तर, दोन परिमेय संख्याच्या मधात अनंत परिमेय संख्या आहेत.

SCERT TELANGANA

दुसरी पध्दतः

सरासरी पध्दती व्दारा $\frac{5}{10}$ आणि $\frac{9}{10}$ मध्ये तुम्ही शंभर परिमेय संख्या लिहु शकता का?
पध्दत खुप मोठी असल्यामुळे तुम्हाला हे अवघड वाटेल.
येथे तुमच्या साठी एक दुसरी पध्दत दिलेली आहे.

आपल्याला माहित आहे. $\frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10} < \frac{9}{10}$

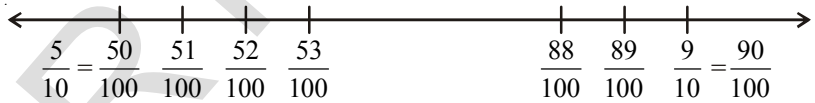


येथे $\frac{5}{10}$ आणि $\frac{9}{10}$ मधातील आपण फक्त तीन परिमेय संख्या लिहिलो.

पण जर आपण समजलेली $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ आणि $\frac{9}{10} = \frac{90}{100}$

आता $\frac{50}{100}$ आणि $\frac{90}{100}$ मधील परिमेय संख्या

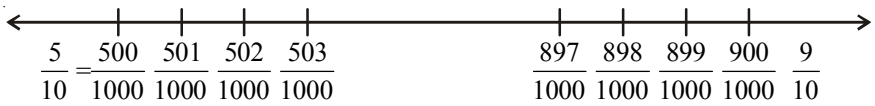
$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} < \frac{51}{100} < \frac{52}{100} < \frac{53}{100} < \ldots\ldots < \frac{89}{100} < \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$



याच प्रमाणे,जर आपण असे समजलो.

$\frac{5}{10} = \frac{500}{1000}$ आणि $\frac{9}{10} = \frac{900}{1000}$

म्हणुन $\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} < \frac{501}{1000} < \frac{502}{1000} < \frac{503}{1000} < \ldots\ldots\ldots\ldots < \frac{899}{1000} < \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$



याप्रकारे आपल्याला जेवढ्या परिमेय संख्या पाहिजे तेवढे ठेवत आपण पुढे जाऊ शकतो.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 8: -3 आणि 0 च्या मधातील कोणत्याही पाच परिमेय संख्या लिहा.

सोडवणुक: $-3 = -\frac{30}{10}$ आणि $0 = \frac{0}{10}$

-3 आणि 0 मधील $-\frac{29}{10}, -\frac{28}{10}, -\frac{27}{10}, \ldots\ldots\ldots, -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}$

या पैकी आपण कोणतेही पाच घेऊ शकतो.

अभ्यास - 1.2

1. संख्या रेषेवर या संख्या दर्शवा

   (i) $\frac{9}{7}$ (ii) $-\frac{7}{5}$

2. संख्या रेषेवर $-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{-9}{13}$, दर्शवा

3. $\frac{5}{6}$ पेक्षा लहान असलेल्या पाच परिमेय संख्या लिहा

4. -1 आणि 2 च्या मधातील 12 परिमेय संख्या लिहा.

5. $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{3}{4}$ या मधील परिमेय संख्या लिहा.

   [सुचना : सारखे छेद असलेले परिमेय संख्या सुरुवातीला लिहा.]

6. $-\frac{3}{4}$ आणि $\frac{5}{6}$ या मधातील दहा परिमेय संख्या माहित करा.

1.6 परिमेय संख्याना दशांशात दर्शविणे.

आपल्याला माहित आहे की, प्रत्येक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ च्या रुपात असते जेथे $q \neq 0$ आणि p, q पुर्णांक आहेत. परिमेय संख्याना दशांश रुपात कसे दाखवु शकतो ते पाहु या.

भागाकार पध्दतीने परिमेय संख्येला दशांशात रुपांतर करणे.

समजा $\frac{25}{16}$ ही परिमेय संख्या आहे.

SCERT TELANGANA

पायरी1: अंशाला छेदाने भागा

पायरी2: भागाकार करणे तो पर्यंत चालु ठेवा. जो पर्यंत बाकी हा भाजका पेक्षा लहान येणार नाही

पायरी3: भागाकारा च्या शेवटच्या अंकाच्या नंतर दशांश बिंदु ठेवा.

पायरी4: भाज्या मध्ये उजव्या बाजुला दशांश देऊन शुन्य ठेवा तसेच बाकी मध्ये सुध्दा 0 ठेवा

पायरी 5: 4 थी पायरी पुन्हा पुन्हा करत राहा जो पर्यंत बाकी शुन्य नाही किंवा पाहिजे असलेले दशांश स्थळ मिळत नाहीत.

```
16)25 (1
   16
   --
    9

16)25.0 (1.
   16
   --
   90

16)25.0000 (1.5625
   16
   --
   90
   80
   --
  100
   96
   --
   40
   32
   --
   80
   80
   --
    0
```

म्हणुन $\frac{25}{16} = 1.5625$

समजा $\frac{17}{5}$

```
5)17.0 (3.4
  15
  --
  20
  20
  --
   0
```

म्हणुन $\frac{17}{5} = 3.4$

$\frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{8}{125}, \frac{1974}{10}$ यांना दशांश रुपात दाखवा आणि त्यांच्या किंमती लिहा.

येथे परिमेय संख्येच्या दशांश भागात अंकाची संख्या सिमीत आहे. असे आपल्या लक्षात आले. अशा दशांशना अनावृत्ती दशांश म्हणतात.

आवृत्ती दशांश (पुन्हा पुन्हा येणारे दशांश)

समजा $\frac{5}{3}$ ही एक परिमेय संख्या

SCERT TELANGANA

भागाकार पध्दतीने ⟶

$$
\begin{array}{l}
3\overline{)5.000}\,(1.666 \\
\underline{3} \\
\;\;20 \\
\;\;\underline{18} \\
\;\;\;20 \\
\;\;\;\underline{18} \\
\;\;\;\;20 \\
\;\;\;\;\underline{18} \\
\;\;\;\;\;2
\end{array}
$$

म्हणुन $\frac{5}{3} = 1.666...$ याला आपण $\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$ असे लिहु शकतो '6' वरचा रेषाखंड हे आवृत्ती दशांश दर्शविते.वरील भागाकारात आपल्याला असे लक्षात येते की, तीच बाकी पुन्हा पुन्हा येत आहे आणि तसेच भागाकारा मध्ये 6 हा अंक पुन्हा पुन्हा येत आहे.

$\frac{1}{7}$ हे परिमेय संख्या आहे.

भागाकार पध्दतीने ⟶

$$
\begin{array}{l}
7\overline{)10.00000000}\,(0.14285714 \\
\underline{7} \\
\;\;30 \\
\;\;\underline{28} \\
\;\;\;20 \\
\;\;\;\underline{14} \\
\;\;\;\;60 \\
\;\;\;\;\underline{56} \\
\;\;\;\;\;40 \\
\;\;\;\;\;\underline{35} \\
\;\;\;\;\;\;50 \\
\;\;\;\;\;\;\underline{49} \\
\;\;\;\;\;\;\;10 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{7} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;30 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{28} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;2
\end{array}
$$

$\frac{1}{7} = 0.142857142857....$

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. 142587 वरचा बार हे दर्शवत आहे की, यात संख्या क्रमाने पुन्हा पुन्हा येत आहेत.वरिल उदाहरणे परिमेय संख्येच्या आवृत्ती दशांशाच्या रुपात दर्शविण्यासाठी स्पष्टीकरण देते किंवा आपण त्यांना पुन्हा पुन्हा येणारे आवृत्ती दशांश म्हणतो.

$\frac{1}{3}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{11}{9}$ आणि $\frac{20}{19}$ यात दशांश रुपात दर्शविण्याचा प्रयत्न करा.

$\frac{1}{3} = \square$ $\frac{17}{6} = \square$ $\frac{11}{9} = \square$ $\frac{20}{19} = \square$

SCERT TELANGANA

भागाकार पध्दतीने काही परिमेय संख्यांना जेव्हा आपण दशांश रुपात दर्शविण्याचा प्रयत्न करतो तेव्हा आपल्याला असे माहित होते की हा भागाकार केव्हाही संपणार नाही. भागाकार मध्ये तिच बाकी पुन्हा पुन्हा काही पायऱ्या नंतर येते त्यामुळे असे घडते. या संदर्भात भागाकार मध्ये अंकाचा संच सारख्या क्रमाने पुन्हा पुन्हा येते.

उदा. 0.33333------.= $0.\overline{3}$

0.12757575---------= $0.12\overline{75}$

123.121121121121----------= $123.\overline{121}$

5.678888----------= $5.67\overline{8}$ इत्यादी

अशा दशांशाना आवृत्ती दशांश किंवा पुन्हा पुन्हा येणारे दशांश म्हणतात. आवृत्ती दशांश मध्ये पुन्हा पुन्हा येणाऱ्या अंकाच्या संचाला अवधी म्हणतात.

उदाहरण,

0.3333 ..... = $0.\overline{3}$ येथे अवधी 3 आहे.

0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ येथे अवधी 75 आहे.

आवृत्ती दशांशाच्या अवधी मधील अंकाच्या संख्येला दोलनांक म्हणतात.

उदाहरण,

0.3333 ..... = $0.\overline{3}$ येथे दोलनांक 1 आहे

0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ येथे दोलनांक 2 आहे.

0.23143143143.....ची आवधी = _____ दोलनांक = _____

125.6788989 .....ची आवधी = _____ दोलनांक = _____

विचार करा - चर्चा करा.

1. खालील दशांश रुपात दर्शवा

(i) $\frac{7}{5}, \frac{3}{4}, \frac{23}{10}, \frac{5}{3}, \frac{17}{6}, \frac{22}{7}$

(ii) वरील मध्ये कोणते आवृत्ती दशांश आहे आणि कोणते अनावृत्ती दशांश आहेत ?

(iii) वरील परिमेय संख्याच्या छेदाला मुळ संख्याच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहा.

(iv) वरील परिमेय संख्याच्या छेदाला जर 2 आणि 5 च्या व्यतीरिक्त मुळ भाजक नसेल तर तुम्ही काय निरिक्षण केलात हे सांगा ?

SCERT TELANGANA

1.7 दशांशाला परिमेय संख्यात रुपांतर करा.

1.7.1 अनावृत्ती दशांशाना परिमेय संख्येत रुपांतर

15.75 हे एक दशांश संख्या आहे.

पायरी 1: दिलेल्या संख्या मध्ये दशांशाची संख्या माहित करणे.15.75 मध्ये 2 च्या स्थळावर आहे.

पायरी 2: दिलेल्या दशांशामध्ये ज्या स्थळावर दशांश आहे तेवढे शुन्य 1च्या समोर ठेवा.

पायरी 3: पायरी दोन मध्ये आलेल्या संख्येला दिलेल्या दशांशाने गुणने आणि भागने.

$$15.75 \times \frac{100}{100} = \frac{1575}{100}$$

पायरी 4: वरील परिमेय संख्येला संक्षीप्त रुपात करणे.

$$\frac{1575}{100} = \frac{1575 \div 5}{100 \div 5} = \frac{315 \div 5}{20 \div 5} = \frac{63}{4}$$

उदाहरण 9: खालील प्रत्येक दशांशाला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात दर्शवा

(i) 0.35 (ii) –8.005 (iii) 2.104

सोडवणुक: (i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$

(ii) $-8.005 = \frac{-8005}{1000} = \frac{-8005 \div 5}{1000 \div 5} = \frac{-1601}{200}$

(iii) $2.104 = \frac{2104}{1000} = \frac{2104 \div 4}{1000 \div 4} = \frac{526 \div 2}{250 \div 2} = \frac{263}{125}$

1.7.2 आवृत्ती दशांशाना परिमेय संख्येत रुपांतर:

खालील उदाहरणा व्दारे रुपांतराच्या पध्दतीची चर्चा करु या.

उदाहरण 10: खालील प्रत्येक दशांशाला परिमेय संख्येत दर्शवा

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{54}$ (iii) $4.\overline{7}$

सोडवणुक (i): $0.\overline{4}$

समजा $x = 0.\overline{4}$

$\Rightarrow x = 0.444 \ldots$ ----------(i)

येथे दशांशाचे दोलनांक एक आहे.

SCERT TELANGANA

(i) च्या दोन्ही बाजुला आपण 10 ने गुणु तर आपल्याला मिळते.

$10x = 4.44$ .... ----------(ii)

(ii) मधुन (i) वजा करुन

$$\begin{array}{r} 10x = 4.444..... \\ x = 0.444..... \\ \hline 9x = 4.000..... \\ \hline x = \frac{4}{9} \end{array}$$

म्हणुन $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

सोडवणुक (ii): $0.\overline{54}$

समजा $x = 0.\overline{54}$

$\Rightarrow x = 0.545454....$ ---------- (i)

येथे दशांशाचे दोलनांक दोन आहे.

म्हणुन आपण (i) च्या दोन्ही बाजुला 100 ने गुणु तर आपल्याला मिळते.

$100x = 54.5454....$ ---------- (ii)

(ii) मधुन (i) वजा करु.

$$\begin{array}{r} 100x = 54.5454 ..... \\ x = 0.5454 ..... \\ \hline 99x = 54.0000..... \\ \hline \end{array}$$

$x = \frac{54}{99}$ म्हणुन $0.\overline{54} = \frac{54}{99}$

निरिक्षण करा

$0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

$0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

$0.\overline{54} = \frac{54}{99}$

$0.\overline{745} = \frac{745}{999}$

सोडवणुक(iii) : $4.\overline{7}$

समजा $x = 4.\overline{7}$

$x = 4.777....$ ---------- (i)

येथे दशांशाचे दोलनांक एक आहे.

म्हणुन(i) च्या दोन्ही बाजुला 10 ने गुणु तर आपल्याला मिळते.

$10x = 47.777....$ ---------- (ii)

(ii) मधुन (i) वजा करु.

$$\begin{array}{r} 10x = 47.777 ..... \\ x = 4.777 ..... \\ \hline 9x = 43.000..... \\ \hline \end{array}$$

SCERT TELANGANA

$x = \frac{43}{9}$ म्हणुन $4.\overline{7} = \frac{43}{9}$.

पर्यायी पध्दत

$$4.\overline{7} = 4 + 0.\overline{7}$$

$$= 4 + \frac{7}{9}$$

$$= \frac{9 \times 4 + 7}{9}$$

$$4.\overline{7} = \frac{43}{9}$$

उदाहरण 11: $15.7\overline{32}$ या मिश्र आवृत्ती दशांशाला $\frac{p}{q}$ च्या स्वरुपात दर्शवा

सोडवणुक: समजा $x = 15.7\overline{32}$

x =15.7323232.... ----------(i)

येथे दोन अंक 32 हे पुन्हा पुन्हा येत आहेत.

म्हणुन वरील दशांशाचे दोलनांक दोन आहे.

म्हणुन(i) च्या दोन्ही बाजुला 10 ने गुणु तर आपल्याला मिळते

100 x = 1573.2323.... ----------(ii)

(ii) मधुन (i) वजा करु.

$$100x = 1573.232323....$$

$$x = 15.732323....$$

$$99x = 1557.50$$

$$x = \frac{1557.5}{99} = \frac{15575}{990}$$

$$= 15.7\overline{32} = \frac{15575}{990}$$

विचार करा- चर्चा करा आणि लिहा

$0.\overline{9}$, $14.\overline{5}$ आणि $1.2\overline{4}$ या दशांशाना परिमेय संख्येत रुपांतर करा. या पध्दती व्यतीरिक्त अजुन दुसरी कोणती तरी सोपी पध्दत तुम्ही माहित करु शकता का ?

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 1.3

1. प्रत्येक दशांशाला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात दर्शवा.

   (i) 0.57 (ii) 0.176 (iii) 1.00001 (iv) 25.125

2. प्रत्येक दशांशाला परिमेय रुपात ($\frac{p}{q}$) दर्शवा

   (i) $0.\overline{9}$ (ii) $0.\overline{57}$ (iii) $0.7\overline{29}$ (iv) $12.2\overline{8}$

3. माहित करा $(x+y) \div (x-y)$ जर

   (i) $x=\frac{5}{2}, y=-\frac{3}{4}$ (ii) $x=\frac{1}{4}, y=\frac{3}{2}$

4. $-\frac{13}{5}$ आणि $\frac{12}{7}$ या गुणाकाराने $-\frac{13}{7}$ आणि $-\frac{1}{2}$ या बेरजेला भागा.

5. जर एका संख्याचा $\frac{2}{5}$ त्याच संख्येचा $\frac{1}{7}$ पेक्षा 36 ने जास्त आहे तर ती संख्या माहित करा.

6. 11 मीटर लांब असलेल्या दोरीतुन $2\frac{3}{5}$ मी. आणि $3\frac{3}{10}$ मी. च्या दोन तुकडे कापले. उरलेली दोरी किती लांबीची आहे ?

7. $7\frac{2}{3}$ मीटर कपड्याची किंमत $12\frac{3}{4}$ रुपये आहे तर प्रत्येक मिटरची किंमत किती.

8. $18\frac{3}{5}$ मी.लांबी आणि $8\frac{2}{3}$ मी रुंदी असलेल्या आयताकृती बगीच्याचे क्षेत्रफळ माहित करा.

9. $-\frac{33}{16}$ या संख्येला कोणत्या संख्येने भागले तर $-\frac{11}{4}$ मिळते ?

10. 64 मीटर कपड्यात सारख्या आकाराचे जर 36 पॅट तयार होतात. तर प्रत्येक पॅट ला किती कपड्याची आवश्यकता आहे.?

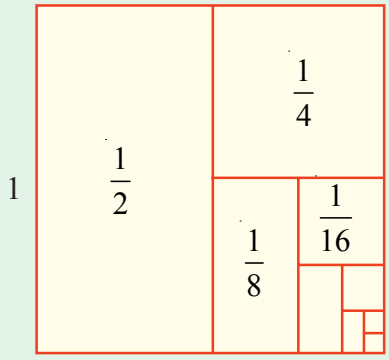
11. 0.363636 .... या आवृत्ती दशांशाला जर $\frac{p}{q}$ या साध्या अपुर्णाकात लिहिले असता $p+q$ ची किंमत माहित करा.

SCERT TELANGANA

आपण काय चर्चा केलो.

1. बेरीज,वजाबाकी आणि गुणाकारच्या क्रियामध्ये परिमेय संख्या संवृत्त आहे.
2. बेरीज आणि गुणाकाराच्या क्रिये मध्ये.
(i) परिमेय संख्या साठी क्रमनिरपेक्ष
(ii) परिमेय संख्या साठी साहचर्य
3. परिमेय संख्यासाठी शुन्य हे बेरजेचे अविकारक आहे.
4. परिमेय संख्यासाठी एक हे गुणाकाराचा अविकारक आहे.
5. परिमेय संख्याचे बेरजेचे व्यस्त ऋण असते आणि ऋण चे धन असते.
6. परिमेय संख्याचे गुणाकार व्यस्त या त्या संख्येचे व्यस्त असते.
7. a,b आणि c या परिमेय संख्याचे वितरण
$a(b+c) = ab + ac$ आणि $a(b-c) = ab - ac$
8. संख्या रेषेवर परिमेय संख्या दर्शवु शकतो.
9. दिलेल्या दोन परिमेय संख्या च्या मध्ये अनंत परिमेय संख्या असतात. दोन परिमेय संख्याच्या मधील परिमेय संख्या माहित करण्यासाठी आपल्याला सरासरी काढण्याऱ्या पद्धतीची मदत होते.
10. परिमेय संख्याचे दशांश एक तर आवृत्ती दशांश रुपात असतात नाही तर अनावृत्ती दशांश रुपात असतात.

a_n च्या सुत्राचा अंदाज करा. तुमच्या अनुमानाचे दृष्यमान समर्थन करण्यासाठी खालील दिलेल्या पोटभाग पाडलेल्या एकक चौरसाचा उपयोग करा.



सुचना : $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.....\quad a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2^n}$

$a_1 = 1-\frac{1}{2},\ a_2 = 1-\frac{1}{4},\ a_3 = 1-\frac{1}{8}.....$ तर $a_n = ?$

SCERT TELANGANA

धडा 2

एका चलातील रेषीय समीकरणे

2.0 परिचय

सागर आणि लता संख्याशी खेळत आहेत. सागर लतास म्हणला : मी एक संख्याचा विचार करीत आहे. मी त्याची दुप्पट करुन त्यातुन 7 वजा केल्यास मला 35 ही संख्या आली. मी मनात धरलेली संख्या तु सांगु शकतोस काय?

लताने थोडा वेळ विचार करुन उत्तर दिले. तुम्ही सुध्दा ते उत्तर सांगु शकता का?

चला लताने कसे उत्तर दिले पाहु या.

समजा ती संख्या 'x'. आहे. त्याची दुप्पट केल्यास '$2x$' येते.

नंतर त्यातुन 7 काढुन टाकणे म्हणजेच '$2x$' मधुन 7 वजा करणे

वजाबाकी केल्यानंतर $2x - 7$ येते.

परंतु सागर नुसार ती संख्या बरोबर आहे. 35

$\Rightarrow \quad 2x - 7 = 35$

$\therefore \quad 2x = 35 + 7$ (7 ला उजवीकडे नेल्यास)

$2x = 42$

$\therefore \quad x = \dfrac{42}{2}$ (2 ला उजवी कडे नेल्यास)

$\therefore \quad x = 21$

$\therefore$ सागरने मनात धरलेली संख्या 21 आहे.

युक्ती
शेवटचे उत्तर घ्या. त्यात 7 मीळवा आणि आलेल्या उत्तराचे अर्धे करा.

सुचना
जेव्हा पदे एका बाजु कडुन दुसऱ्या बाजुकडे नेली जाते तेव्हा
'+' राशी '–' होते
'–' राशी '+' होते
'×' राशी '÷' होते
'÷' राशी '×' होते

मागील वर्गात $2x - 7 = 35$ हे समीकरणाचे एक उदाहरण आहे. हे आपण शिकलो. वरील पध्दतीनुसार हे समीकरण सोडविले असता सागरने मनात धरलेली संख्या लता समर्थपणे माहित करु शकते.या धड्यात आपण आपल्या जिवनात एका चलातील रेषीय समीरकणे, साधी समीकरणे सोडविण्याच्या पध्दती आणि त्यांचे उपयोजन या बद्दल चर्चा करु या.

चला, आपण समीकरणाची संक्षीप्त पणे उजळणी करु या :

(i) बैजिक समीकरण हे बैजिक पदावलीच्या बरोबर आहे. ज्यामध्ये चल आणि स्थिरांक यांचा समोवश आहे.

$2x - 7 = 35$

डावी बाजु उजवी बाजु

SCERT TELANGANA

(ii) त्यात बरोबर चिन्ह असते.

(iii) बैजिक पदावलीच्या बरोबर चिन्हाच्या डाव्या बाजुस डावी बाजु असे म्हणतात.

(iv) बैजिक पदावलीच्या बरोबर चिन्हाच्या उजव्या बाजुस उजवी बाजु असे म्हणतात.

(v) समीकरणात डाव्या बाजुच्या किंमती आणि उजव्या बाजुच्या किंमती समान असतात. हे चलाच्या काही विशिष्ट किंमतीसाठी सत्य होते. यालाच समीकरणाचा उकल असे म्हणतात.

$2x - 7 = 35$ सत्य आहे फक्त $x = 21$ साठी म्हणजेच, जर $x = 21$

डावी बाजु $= 2x - 7$

$= 2 \times 21 - 7$

$= 35$

= उजवी बाजु

$\therefore$ उकल $x = 21$

2.1 रेषीय समीकरणे.

खालील समीरकणे घ्या.

(1) $2x - 7 = 35$ (2) $2x + 2y = 48$ (3) $4x - 1 = 2x + 5$ (4) $x^2 + y = z$

(1), (2) आणि (3) समीकरणात कोटी एक आहे. म्हणुन त्यांस रेषीय समीकरणे असे म्हणतात.(4) मध्ये समीकरणाचा कोटी एक नसल्यामुळे ते रेषीय समीकरण होत नाही.

म्हणुन (1), (2) आणि (3) ही रेषीय समीकरणाची उदाहरणे आहेत. 4 या समीकरणाचा कोटी एक नसल्यामुळे ते रेषीय समीकरण होत नाही.

हे करा:

खालील पैकी कोणती रेषीय समीकरणे आहेत.

(i) $4x + 6 = 8$ (ii) $4x - 5y = 9$ (iii) $5x^2 + 6xy - 4y^2 = 16$

(iv) $xy + yz + zx = 11$ (v) $3x + 2y - 6 = 0$ (vi) $3 = 2x + y$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$

2.2 साधी समीकरणे किंवा एक चलातील रेषीय समीकरणे:

खालील समीकरणे घ्या.

(i) $2x - 7 = 35$ (ii) $4x - 1 = 2x + 5$ (iii) $2x + 2y = 48$

आपण आताच शिकलो की ही रेषीय समीकरणे आहेत. प्रत्येक समीकरणातील एकुण चलांचे निरिक्षण करा.

SCERT TELANGANA

(i) आणि (ii) ही एक चलांतील रेषीय समीकरणांची उदाहरणे आहेत. परंतु (iii)समीकरणात 'x' आणि 'y'. ही दोन चले आहेत. म्हणुन यास दोन चलाची रेषीय समीकरणे म्हणतात.

अशाप्रकारे $ax + b = 0$ किंवा $ax = b$ येथे a, b हे दोन स्थिरांक आहेत, आणि $a \neq 0$ असल्यास त्यास एक चलातील रेषीय समीकरणे किंवा साधी समीकरणे म्हणतात.

हे करा:

खालील पैकी कोणती साधी समीकरणे आहेत?

(i) $3x + 5 = 14$ (ii) $3x - 6 = x + 2$ (iii) $3 = 2x + y$

(iv) $\frac{x}{3} + 5 = 0$ (v) $x^2 + 5x + 3 = 0$ (vi) $5m - 6n = 0$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$ (viii) $13t - 26 = 39$

2.3 एका बाजुस चल असणारी साधी समीकरणे सोडविणे.

साधी समीकरणे सोडविण्याच्या पध्दतीची उजळणी करु या (एक बाजुस चल असलेली.) याच पध्दतीचा वापर करुन लताने कोडे सोडवुन सागरने मनात धरलेली संख्या सांगीतली.

उदाहरण 1: $3y + 39 = 8$ समीकरण सोडवा

सोडवणुक: दिलेले समीकरण : $3y + 39 = 8$

$3y = 8 - 39$ (39 ला उजव्या बाजुला नेल्यास)

$3y = -31$

$y = \frac{-31}{3}$ (3 ला डाव्या बाजुला नेल्यास)

$\therefore 3y + 39 = 8$ चा उकल $y = \frac{-31}{3}$ आहे.

तुम्ही उकल $(\frac{-31}{3})$ ही परिमये संख्या आहे. हे लक्षात आले का.

> खरे किंवा खोटे सांगा.? तुमचे उत्तर स्पष्ट करा ?
>
> समीकरण सोडवितांना काव्याने खालील प्रकारे केली.
>
> $3x + x + 5x = 72$
>
> $9x = 72 \quad x = 72 \times 9 = 648$
>
> तिने कुठे चुक केली ? अचुक उत्तर शोधा ?

तपासणी: उजवी बाजु $= 3y + 39 = 3\,(\frac{-31}{3}) + 39 = -31 + 39 = 8$ डावी बाजु

उदाहरण 2: $\frac{7}{4} - p = 11$ सोडवा.

सोडवणुक: $\frac{7}{4} - p = 11$

SCERT TELANGANA

$-p = 11 - \frac{7}{4}$ ($\frac{7}{4}$ ला उजव्या बाजुस नेल्यास)

$-p = \frac{44-7}{4}$

$-p = \frac{37}{4}$

$\therefore p = -\frac{37}{4}$ (दोन्ही बाजुस -1 ने गुणल्यास)

p ला डाव्या बाजु कडुन उजव्या बाजुकडे नेणे आणि p ची किंमत काढणे.

p च्या किंमतीत काही बदल आहे का?

तपासणी: डावी बाजु = $\frac{7}{4} - p = \frac{7}{4} - (-\frac{37}{4}) = \frac{7}{4} + \frac{37}{4} = \frac{7+37}{4} = \frac{44}{4} = 11 =$ उजवी बाजु

अभ्यास - 2.1

खालील साधी समीकरणे सोडवा.

(i) $6m = 12$ (ii) $14p = -42$

(iii) $-5y = 30$ (iv) $-2x = -12$

(v) $34x = -51$ (vi) $\frac{n}{7} = -3$

(vii) $\frac{2x}{3} = 18$ (viii) $3x + 1 = 16$

(ix) $3p - 7 = 0$ (x) $13 - 6n = 7$

(xi) $200y - 51 = 49$ (xii) $11n + 1 = 1$

(xiii) $7x - 9 = 16$ (xiv) $8x + \frac{5}{2} = 13$

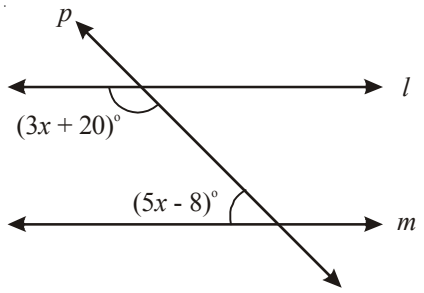
(xv) $4x - \frac{5}{3} = 9$ (xvi) $x + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{2}$

SCERT TELANGANA

2.3.1 काही उपयोजन:

खालील उदाहरणे घ्या.

उदाहरण 3: जर $l \parallel m$, तर 'x' ची किंमत काढा. ?



सोडवणुक: येथे $l \parallel m$ आणि p छेदीका आहे.

म्हणुन $3x + 20^o + 5x - 8^o = 180^o$ (छेदीकेच्या एकाच बाजुवर असलेल्या आतील कोनाची बेरीज 180^0 आहे.)

$$3x + 20^o + 5x - 8^o = 180^o$$

$$8x + 12^o = 180^o$$

$$8x = 180^o - 12^o$$

$$8x = 168^o$$

$$x = \frac{168^o}{8} = 21^o$$

उदाहरण 4: दोन संख्यांची बेरीज 29 आहे. आणि एक संख्या दुसऱ्या संख्येपेक्षा 5 ने जास्त आहे. त्या संख्या काढा.

सोडवणुक: इथे आपणास कोडे आहे. आपणास त्या संख्या माहित नाही त्या माहित केल्या पाहिजेत.

समजा लहान संख्या x, तर मोठी संख्या $x + 5$

परंतु दोन संख्याची बेरीज 29 आहे हे दिलेले आहे.

$$\Rightarrow x + x + 5 = 29$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = 29$$

$$\therefore 2x = 29 - 5$$

$$\therefore 2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2}$$ (2 ला उजव्या बाजुकडे नेले असता)

$$x = 12.$$

SCERT TELANGANA

म्हणुन लहान संख्या = x = 12 आणि

मोठी संख्या = $x + 5 = 12 + 5 = 17$.

तपासणी: 17 ही 12 पेक्षा 5 ने अधिक आहे. आणि त्यांची बेरीज = 12 + 17 = 29.

उदाहरण 5: एका संख्येच्या चौपटातुन 5 कमी केले असता 19 येते तर ती संख्या माहित करा.

सोडवणुक: जर ती संख्या 'x' घेतल्यास

त्याची चारपट '$4x$' होते.

त्यातुन 5 कमी केल्यास ती 19 ला समान होते

$\Rightarrow \quad 4x - 5 = 19$

$4x = 19 + 5$ (-5 ला उजव्या बाजुला नेले असता.)

$4x = 24$

$\therefore x = \frac{24}{4}$ (4 ला उजव्या बाजुला नेल्यास)

$\Rightarrow x = 6$

येणारी संख्या 6 आहे.

तपासणी : 6 ची चार पट 24 आहे आणि 24-5= 19

उदाहरण 6: आयताकार आकाराच्या बगीच्याची लांबी त्याच्या रुंदीपेक्षा 17 मीटर जास्त आहे. जर बगीच्याची परिमीती 178 मीटर असल्यास बगीच्याचे परीमाण काढा.?

सोडवणुक: समजा बगीच्याची रुंदी = x मीटर

तर बगीच्याची लांबी = $x + 17$ मीटर

$\therefore$ परिमीती = 2 (लांबी + रुंदी)

= 2 $(x + 17 + x)$ मीटर

= 2 $(2x + 17)$ मीटर

परंतु आयताची परिमीती 178 मीटर दिली आहे.

$\therefore \quad 2(2x + 17) = 178$

$4x + 34 = 178$

$4x = 178 - 34$

$4x = 144$

$x = \frac{144}{4} = 36$

SCERT TELANGANA

बगीच्याची रुंदी = 36 मीटर

बगीच्याची लांबी = 36+17 मीटर

तुम्ही स्वत:प्रयत्न करुन तपासुन पहा.

उदाहरण 7: दोन संपुरक कोनामधील फरक 34 आहे तर कोन माहित करा.

सोडवणुक: समजा लहान कोन = x^o

दोन कोनातील फरक 34^0 आहे. $= x^\circ + 34^o$

संपुरक कोनांची बेरीज 180° आहे.

आपणास $x^\circ + (x + 34)^\circ = 180^o$

$$2x^\circ + 34^\circ = 180^o$$

$$2x^\circ = 180^\circ - 34^\circ = 146^o$$

$$x^\circ = \frac{146^o}{2} = 73^o$$

लहान कोन $= x^\circ = 73^o$

मोठा कोन $= x^\circ + 34^\circ = 73^\circ + 34^\circ = 107^o$

उदाहरण 8: विजयाच्या आईचे आजचे वय विजयाच्या आजच्या वयापेक्षा चार पट आहे. 6 वर्षानंतर त्यांच्या वयांची बेरीज 62 वर्ष होते. त्यांचे आजचे वय काढा.

सोडवणुक: समजा विजयाचे आजचे वय 'x' वर्ष आहे.

तर आपण खालील तक्ता बनवु शकतो.

	विजया	विजयाची आई
आजचे वय	x	$4x$
6 वर्षानंतर चे वय	$x + 6$	$4x + 6$

$\therefore$ 6 वर्षानंतरचे त्याच्या वयांची बेरीज $= (x + 6) + (4x + 6)$

$$= x + 6 + 4x + 6$$

$$= 5x + 12$$

परंतु 6 वर्षानंतर त्यांच्या वयांची बेरिज 62 दिली आहे.

$\Rightarrow 5x + 12 = 62$

$$5x = 62 - 12$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5} = 10$$

SCERT TELANGANA

विजयाचे आजचे वय $= x = 10$ वर्ष

विजयाच्या आईचे आजचे वय $= 4x = 4 \times 10 = 40$ वर्ष

उदाहरण 9 : एका परिक्षेत 90 बहुपर्यायी प्रश्न आहेत. प्रत्येक अचुक उत्तरास 2 गुण देणे आणि प्रत्येक चुक उत्तरासाठी 1 गुण कमी करणे आहे. सहानाला परिक्षेत सर्व उत्तरे देतांना 60 गुण मिळाले असता. तीने एकुण किती अचुक प्रश्न सोडविले. ?

सोडवणुक: समजा अचुक उत्तर सोडविलेले एकुण प्रश्न 'x', आहे. तर चुक उत्तर सोडविलेले एकुण प्रश्न $= 90 - x$ प्रत्येक अचुक उत्तरासाठी 2 गुण दिलेले आहे.

$\therefore$ अचुक उत्तरांसाठी मिळालेले एकुण गुण $= 2x$

आणि प्रत्येक चुक उत्तरासाठी '1' गुण कमी केलेला आहे.

$\therefore$ प्राप्त केलेल्या गुणातुन कमी केलेले एकुण गुण

$= (90 - x) \times 1 = 90 - x$

एकुण प्राप्त गुण $= 2x - (90 - x) = 2x - 90 + x = 3x - 90$

परंतु मिळालेले एकुण गुण 60 आहे.

$\Rightarrow \quad 3x - 90 = 60$

$3x = 60 + 90$

$3x = 150$

$x = \frac{150}{3} = 50$

एकुण अचुक उत्तर दिलेल्या प्रश्नांची संख्या $= x = 50$

उदाहरण 10: रवी बँकेत रोखपाल म्हणुन कार्यरत आहे. त्याच्या जवळ 100 रुपये, 50 रुपये, 10 रुपये, किंमतीच्या नोटा आहेत. या नोटाचे गुणोत्तर 2:3:5 आहे. रविजवळ प्रत्येक रक्कमेच्या किती नोटा आहेत.?

सोडवणुक: समजा 100 रुपयांच्या एकुण नोटा $= 2x$

50 रुपयांच्या एकुण नोटा $= 3x$

आणि 10 रुपयांच्या एकुण नोटा $= 5x$

$\therefore$ एकुण रक्कम $= (2x \times 100) + (3x \times 50) + (5x \times 10)$

लक्षात घ्या की, 2x : 3x : 5x
2 : 3 : 5 च्या बरोबर आहे

$200x + 150x + 50x = 400x$

SCERT TELANGANA

परंतु प्रश्नानुसार एकुण रक्कम 4,00,000

$\Rightarrow \quad 400x = 4,00,000$

$$x = \frac{400000}{400} = 1000$$

म्हणुन, 100 रुपयांच्या एकुण नोटा $= 2x = 2 \times 1000 = 2000$

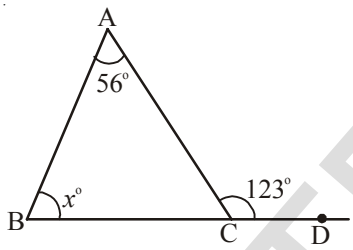
50 रुपयांच्या एकुण नोटा $= 3x = 3 \times 1000 = 3000$

10 रुपयांच्या एकुण नोटा $= 5x = 5 \times 1000 = 5000$

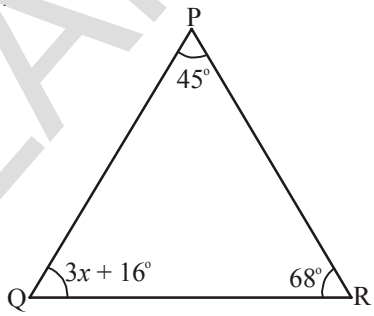
अभ्यास - 2.2

1. खालील आकृतीवरुन 'x' माहित करा.?

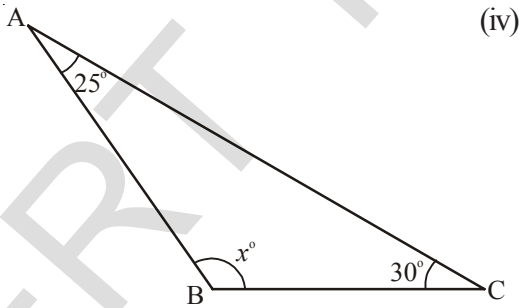
(i)



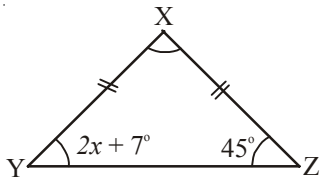
(ii)



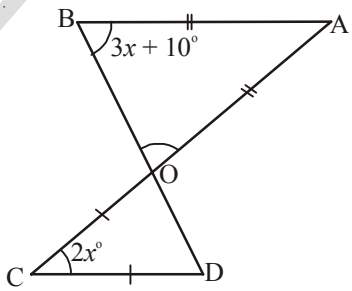
(iii)



(iv)



(v)



SCERT TELANGANA

2. दोन संख्येतील फरक 8 आहे. जर मोठ्या संख्येत 2 मिळविले असता येणारी संख्या लहान संख्येच्या तिप्पट होते. त्या संख्या काढा.

3. त्या दोन संख्या कोणत्या ज्यांची बेरीज 58 आहे आणि फरक 28 आहे.?

4. दोन क्रमवार विषम संख्याची बेरिज 56 आहे. तर त्या संख्या शोधा.

5. तिन क्रमवार येणाऱ्या 7 च्या गुणकांची बेरिज 777 आहे. तर ते गुणक काढा

   (सुचना: तिन क्रमवार येणारे 7 चे गुणक 'x', '$x + 7$', '$x + 14$'आहेत.)

6. एक मनुष्य 10 कि.मी. पायी चालुन नंतर तो काही अंतर ट्रेननी प्रवास करतो नंतर तो ट्रेन पेक्षा दुप्पट प्रवास बसने करतो. जर पुर्ण प्रवास 70 कि.मी. असल्यास तो ट्रेन ने किती दुर प्रवास केला.?

7. विनयने पिझ्झा कापुन त्याचे तिन तुकडे केले. जेव्हा त्यांनी पहिल्या तुकड्याचे वजन केले तेव्हा ते दुसऱ्या तुकड्यापेक्षा 7 ग्रॉम कमी आणि तिसऱ्या तुकड्यापेक्षा 4 ग्रॉम वजन जास्त भरले. जर पुर्ण पिझ्झा 300 ग्रॉम वजनाचा असल्यास त्याच्या तिनही तुकड्याचे वजन किती राहिल. ?

   (सुचना: पहिल्या तुकड्याचे वजन 'x' ग्रॅम आहे. तर दुसऱ्या तुकड्याचे वजन '$x + 7$ग्रॅम', तिसऱ्या तुकड्याचे वजन '$x - 4$ ग्रॅम')

8. आयताकार शेताच्या भोवतालचे अंतर 400 मीटर आहे. शेताची लांबी रुंदीपेक्षा 26 मीटर जास्त आहे. तर त्या शेताची लांबी आणि रुंदी माहित करा?

9. आयताकार शेताची लांबी, रुंदीच्या दुप्पटीपेक्षा 8 मीटरने कमी आहे. जर आयताकार शेताची परिमीती 56 मीटर आहे. तर त्याची लांबी आणि रुंदी काढा.?

10. एका त्रिकोणात दोन्ही बाजु समान आहेत. त्यांची मापे तिसऱ्या बाजुच्या दुप्पटीपेक्षा 5 मीटरने कमी आहे. त्रिकोनाची परिमीती 55 मिटर असल्यास बाजुंची मापे माहित करा?

11. दोन पुरक कोनातील फरक 12^0 आहे. तर ते कोण काढा ?

12. राहुल आणि लक्ष्मीच्या वयाचे गुणोत्तर 5:7 आहे. चारवर्षा नंतर त्याच्या वयाची बेरीज 56 वर्ष होते. तर त्यांचे आजचे वय काय आहे. ?

13. एका परिक्षेत 180 बहु पर्यायी प्रश्न आहेत. जर उमेदवाराला प्रत्येक अचुक उत्तरासाठी 4 गुण मिळते. आणि प्रत्येक प्रश्न न सोडविणे किंवा चुक उत्तरासाठी प्रत्येक 1 गुण कमी करते जर उमेदवारांनी 450 गुण मिळविले असता त्यांनी परिक्षेत किती प्रश्नांची अचुक उत्तरे दिली आहेत.?

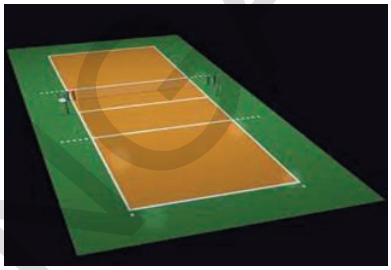
14. 5 रुपयाच्या, 10 रुपयांच्या एकुण 90 नोटा आहेत. यांची एकुण किंमत 500 रुपये असल्यास कोणत्या नोटा किती आहेत माहित करा.

   (सुचना: समजा 5 रुपयाच्या 'x', नोटा आहेत, तर 10 रुपयांच्या नोटा = $90–x$)

SCERT TELANGANA

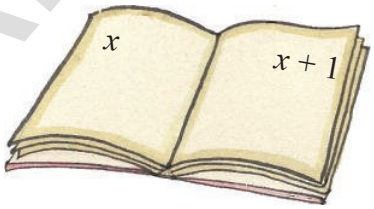
15. एक व्यक्ती पेन आणि पेन्सीलच्या खरेदीवर 564 रुपये खर्च करतो. जर प्रत्येक पेन ची किंमत 7 रुपये आणि प्रत्येक पेन्सीलची किंमत 3 रुपये आणि जर एकुण 108 वस्तु विकत आणल्यास प्रत्येक प्रकारचे किती वस्तु त्यांनी विकत घेतले.?

16. शाळेतील वॉलीबाल कोटची परिमीती 177 फिट आणि लांबी ही रुंदीच्या दुप्पट आहे. त्या वॉलीबाल कोटचे परिणाम काय आहे.?



17. एक पुस्तक उघडुन आहे. उघलेले या दोन्ही पानात पान नंबर ची संख्या 373 असल्यास पान नंबर माहित करा?

(सुचना:उघडलेल्या पानांची संख्या x आणि x+1 घ्या.)



2.4 समीकरणाच्या दोन्ही बाजुला असलेल्या चलांचे समीकरण सोडविणे:

आपणास माहित आहे की, समीकरणात दोन बाजुच्या राशीच्या किंमतीत समानता आहे. $2x - 7 = 35$ समीकरणात दोन पदावली 2x-7 आणि 35आहे. जास्तीत जास्त उदाहरणात आपणास समीकरणाच्या उजव्या बाजुस आतापर्यंत फक्त संख्याच पाहिली. परंतु तसे नेहमी राहु शकत नाही, दोन्ही बाजुला चलांची पदावली राहु शकते. हे कसे ते आपण आता पाहुया.

खालील उदाहरण घ्या.

उदाहरण 11: रफि आणि फातीमाच्या आजच्या वयाचे गुणोत्तरात 7:5 आहेत. 10 वर्षानंतर त्यांच्या वयाचे गुणोत्तर 9:7 होते. तर त्यांचे आजचे वय काढा.?

सोडवणुक: रफि आणि फातीमाचे वय 7:5 गुणोत्तर आहे.

आपण रफि चे वय $7x$ आणि फातिमा वय $5x$ घेऊ या.

(लक्षात घ्या $7x$ आणि $5x$ चे गुणोत्तर $7x : 5x$ आहे ते 7:5 ला समान आहे.)

10 वर्षानंतर रफि चे वय $= 7x + 10$

आणि फातीमाचे वय $= 5x + 10$

10 वर्षानंतर रफि आणि फातीमाच्या वयाचे गुणोत्तर $7x + 10 : 5x + 10$

परंतु दिलेल्या माहितीनुसार गुणोत्तर $9 : 7$ आहे.

$\Rightarrow \quad 7x + 10 : 5x + 10 = 9 : 7$

म्हणजेच $7(7x + 10) = 9(5x + 10)$

SCERT TELANGANA

$\Rightarrow \quad 49x + 70 = 45x + 90.$

वरील समीकरणात आपणास समीकरणाच्या दोन्ही बाजुला बैजीक पदावली असल्याचे लक्षात आले काय.

आता आपण अशी समीकरणे कशी सोडवयाची ते शिकुया.

वरील समीकरण $49x + 70 = 45x + 90$ आहे.

$\Rightarrow \quad 49x - 45x = 90 - 70$ (70 ला उजव्या बाजुस आणि 45 ला डाव्या बाजुला नेल्यास)

$\therefore \quad 4x = 20$

$\therefore \quad x = \frac{20}{4} = 5$

म्हणुन रफि चे वय = $7x = 7 \times 5 = 35$ वर्ष

आणि फातिमा चे वय $= 5x = 5 \times 5 = 25$ वर्ष

उदाहरण 12: $5(x + 2) - 2(3 - 4x) = 3(x + 5) - 4(4 - x)$ सोडवा

सोडवणुक : $5x + 10 - 6 + 8x = 3x + 15 - 16 + 4x$ (कंस सोडविल्यास)

$13x + 4 = 7x - 1$ (सजातीय पदे मिळविल्यास)

$13x - 7x = -1 - 4$ (4 ला उजव्या बाजुस, $7x$ ला डाव्या बाजुस नेल्यास)

$6x = -5$

$x = \frac{-5}{6}$ (6 ला उजव्या बाजुला नेल्यास)

अभ्यास - 2.3

खालील समीकरणे सोडवा.

1. $7x - 5 = 2x$
2. $5x - 12 = 2x - 6$
3. $7p - 3 = 3p + 8$
4. $8m + 9 = 7m + 8$
5. $7z + 13 = 2z + 4$
6. $9y + 5 = 15y - 1$
7. $3x + 4 = 5(x - 2)$
8. $3(t - 3) = 5(2t - 1)$

SCERT TELANGANA

9. $5(p-3) = 3(p-2)$

10. $5(z+3) = 4(2z+1)$

11. $15(x-1) + 4(x+3) = 2(7+x)$

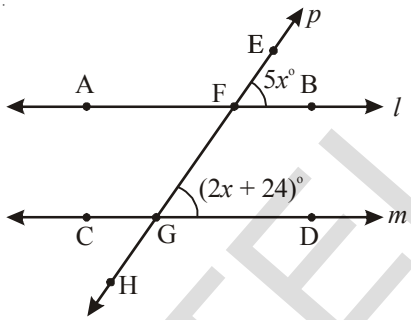
12. $3(5z-7) + 2(9z-11) = 4(8z-7) - 111$

13. $8(x-3) - (6-2x) = 2(x+2) - 5(5-x)$

14. $3(n-4) + 2(4n-5) = 5(n+2) + 16$

2.4.1 अजुन काही उपयोजन

उदाहरण 13: आकृतीत $l \parallel m$, आणि p ही छेदीका आहे 'x'ची किंमत काढा.?



सोडवणुक: $l \parallel m$ आणि p ही छेदीका आहे. हे दिले आहे.

म्हणुन $\angle EFB = \angle FGD$ (संगत कोन)

म्हणुन $5x^o = 2x + 24^o$

$5x - 2x = 24$

$3x = 24$

$x = \frac{24}{3} = 8^o$

उदाहरण 14: हेमा ही तिची मुलगी दामीनी पेक्षा 24 वर्षानी मोठी आहे. 6 वर्षापुर्वी हेमा दामिनी पेक्षा पिप्पट मोठी होती. त्यांचे वय काढा.

सोडवणुक: समजा दामिनीचे आजचे वय 'x' वर्ष आहे. आपण आता खालील तक्ता बनवु शकतो.

	दामिनी	हेमा
आजचे वय	x	$x + 24$
6 वर्षापुवी चे वय	$x - 6$	$(x + 24) - 6 = x + 24 - 6 = x + 18$

SCERT TELANGANA

परंतु 6 वर्षापुर्वी हेमा, दामिनीपेक्षा तिनपट मोठी होती.

$\therefore\ x + 18 = 3(x - 6)$

$x + 18 = 3x - 18$

$x - 3x = -18 - 18$

$-2x = -36$

$x = 18.$

म्हणुन दामिनीचे आजचे वय $= x = 18$ वर्ष

हेमा चे आजचे वय $= x + 24 = 18 + 24 = 42$ वर्ष

उदाहरण 15: दोन अंकी संख्येत दोन अंकाची बेरीज 8 आहे. त्या संख्येत 18 मिळविले असता त्यांच्या अंकाची अदलाबदल होते. तर ती संख्या माहित करा.

सोडवणुक: समजा एकम स्थानी असाणारा अंक 'x' आहे.

दशम स्थानी असणारा अंक $= 8 - x$ (दोन अंकाची बेरीज 8आहे.)

$\therefore$ संख्या$10(8 - x) + x = 80 - 10x + x = 80 - 9x$ —— (1)

आता, अंकाची अदलाबदल केली असता येणारी संख्या $= 10 \times (x) + (8 - x)$

$= 10x + 8 - x = 9x + 8$

त्या संख्येत 18 मिळविल्यास त्यांच्या अंकाची अदलाबदल होते.

$\therefore$ संख्या + 18 = अंकाची अदलाबदल होऊन येणारी संख्या.

$\Rightarrow\ (80 - 9x) + 18 = 9x + 8$

$98 - 9x = 9x + 8$

$98 - 8 = 9x + 9x$

$90 = 18x$

$x = \dfrac{90}{18} = 5$

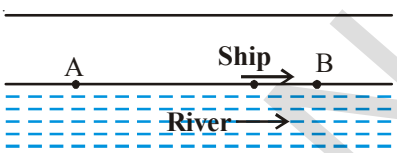
समीकरण (1) मध्ये x ची किंमत ठेवली असता आपणास संख्या येते.

$\therefore$ संख्या $= 80 - 9 \times 5 = 80 - 45 = 35.$

उदाहरण 16: एक मोटारबोट पाण्याच्या प्रवाह सोबत प्रवास करतांना किनाऱ्यावर असलेल्या दोन्ही शहरातील अंतरास 5 तासात पार करते. ही मोटार बोट पाण्याच्या ओघाच्या विरुध्द दिशेत प्रवास करुन हेच अंतर 6 तासात पार करते. पाण्याचा प्रवाह चा वेग तासी 2 कि.मी. असल्यास संथ वाहणाऱ्या पाण्यात मोटार बोटचा वेग काढा.

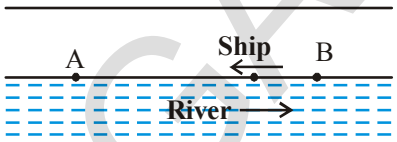
SCERT TELANGANA

सोडवणुक: आपण संथ पाण्यातील बोटचा वेग माहित केला पाहिजे. समजा तो वेग x कि.मी./तास आहे.



म्हणजेच पाण्याचा ओघाकडे जातांना बोटाचा वेग

$(x + 2)$ कि.मी./तास या वेगाने पुढे ढकलत आहे. त्यांची स्वतःचा वेग 'x' कि.मी./तास आहे. म्हणुन येतांना वेग $(x - 2)$ कि.मी./तास होते.



आता जातांना बोटचा वेग $= (x + 2)$ कि.मी./तास

$\Rightarrow$ एका तासात कापलेले अंतर $= x + 2$ कि.मी.

$\therefore$ 5 तासात कापलेले अंतर $= 5\,(x + 2)$ कि.मी.

A आणि B मधील अंतर $5\,(x + 2)$ कि.मी. आहे.

येताना बोटचा वेग $= (x - 2)$ कि.मी. /तास

$\Rightarrow$ एका तासात पार केलेले अंतर $= (x - 2)$ कि.मी.

6 तासात पार केलेले अंतर $= 6\,(x - 2)$ कि.मी.

$\therefore$ A आणि B मधील अंतर $6\,(x - 2)$ कि.मी. / तास आहे.

परंतु A आणि B मधील अंतर स्थिर आहे.

$\therefore\ 5\,(x + 2) = 6\,(x - 2)$

$\Rightarrow\quad 5x + 10 = 6x - 12$

$\Rightarrow\quad 5x - 6x = -12 - 10$

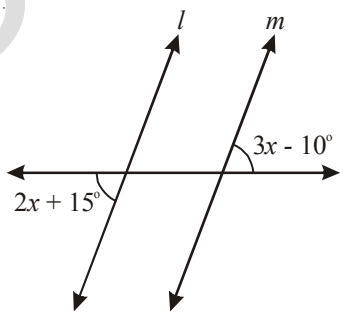
$\therefore\quad -x = -22$

$x = 22.$

म्हणुन बोटचा संथ पाण्यातील वेग = 22 कि.मी. / तास आहे.

अभ्यास- 2.4

1. $l \parallel m$.असल्यास 'x' ची किंमत माहित करा.



SCERT TELANGANA

2. एका संख्येच्या आठपटीतुन 10 वजा केले असता ती त्या संख्येच्या 6 पट आणि 4 च्या बेरजेला समान आहे. तर ती संख्या काढा.
3. एका संख्येत दोन अंक आहेत. त्यांची बेरीज 9 आहे. जर त्या संख्येतुन 27 वजा केल्यास त्यांच्या अंकाची अदलाबदल होते. ती संख्या काढा.
4. एका संख्येला दोन भागात असे विभागले की एक भाग हा दुसऱ्या भागापेक्षा 10 ने अधीक आहे. जर दोन्ही भागाचे गुणोत्तर 5:3 आहे. तर त्या संख्या आणि दोन भाग माहित करा.
5. जेव्हा मी एका संख्येची तिप्पट करुन त्यात 2 मिळवितो. मला सारखेच उत्तर मिळते. जेव्हा मी 50 मधुन ती संख्या वजा करतो तर ती संख्या काढा.
6. मेरी तिच्या बहिणीपेक्षा दुप्पट मोठी आहे. 5 वर्षात ती तिच्या बहिणीपेक्षा 2 वर्षाने मोठी होते. आता ती किती वर्षाची आहे ते काढा.
7. 5 वर्षात रेश्मा 9 वर्षाच्या अगोदरच्या तिच्या वयापेक्षा तिप्पट होती आता ती किती वर्षाची आहे.?
8. एका शहराची लोकसंख्या 1200 वाढली त्यानंतर ती सध्याच्या लोकसंख्येच्या 11 % कमी झाली. आता ती लोकसंख्या पहिल्या लोकसंख्येपेक्षा 32 ने कमी आहे. तर त्या शहराची अगोदरची लोकसंख्या काढा?

2.5 समीकरणाचे साधे रुप - समीकरणाचे रेषीय समीकरण रुपः

उदाहरण 17: $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$ सोडवा

सोडवणुकः $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ($\frac{x}{3}$ ला डाव्या बाजुस आणि $\frac{1}{4}$ ला उजव्या बाजुस नेल्यास)

$\frac{3x-2x}{6}=\frac{2+1}{4}$ (2 आणि 3 ची लसावी6 आहे.2 आणि 4 चा लसावी 4 आहे)

$\frac{x}{6}=\frac{3}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{4}\times 6$ (6 ला उजव्या बाजुस नेले असता)

$\therefore x=\frac{9}{2}$

$\therefore x=\frac{9}{2}$ समीकरणाचा उकल आहे.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 18: $\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$ सोडवा

सोडवणुक :

$$\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5(x-4)-7(x+4)}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5x-20-7x-28}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{-2x-48}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$-2x-48=\frac{(x+3)}{7}\times 35$$

$\Rightarrow$ $-2x-48=(x+3)\times 5$

$\Rightarrow$ $-2x-48=5x+15$

$\Rightarrow$ $-2x-5x=15+48$

$-7x = 63$

$$x=\frac{63}{-7}=-9.$$

उदाहरण 19: $\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{12}{7}$ समीकरण सोडवा ————(1)

सोडवणुक: समीकरणाच्या दोन्ही बाजुस $2x+3$. ने गुणाकार केल्यास

$$\frac{5x+2}{2x+3}\times(2x+3)=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

$$5x+2=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

पुन्हा समीकरणाच्या दोन्ही बाजुला 7 ने गुणाकार केल्यास

$$7\times(5x+2)=7\times\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

SCERT TELANGANA

$\Rightarrow 7\times(5x+2)=12\times(2x+3)$ ————(2)

$35x+14=24x+36$

$35x-24x=36-14$

$11x=22$

$\therefore x=\frac{22}{11}=2$

आता, दिलेल्या समीकरणाकडे पहा, म्हणजे(1) आणि (2) कडे काळजीपुर्वक पहा.

दिलेले समीकरण	समीकरणाचे साधे रुप
$\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{12}{7}$	$7\times(5x+2)=12\times(2x+3)$

तुम्हाला काय दिसुन आले? आपण सोडविलेले

1. डाव्या बाजुच्या अंशाला उजव्या बाजुच्या छेदाने गुणल्यास

$$\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

2. उजव्या बाजुच्या अंशाला डाव्या बाजुच्या छेदाने गुणल्यास

$$\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

3. (1) आणि (2) $7\times(5x+2)=12\times(2x+3)$ मध्ये समीकरणास समान केल्यास

वरील पध्दतीस गुणाकाराची तिरप पध्दत - तिरपा गुणाकार असे आपण म्हणतो. आता आपण काही उदाहरणे घेऊन या तिरपा पध्दतीस स्पष्ट करु या.

उदाहरण 20: $\frac{x+7}{3x+16}=\frac{4}{7}$ समीकरण सोडवा

सोडवणुक: तिरपा गुणाकार करुन

$$\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$$

$7\times(x+7)=4\times(3x+16)$

$7x+49=12x+64$

$7x-12x=64-49$

$-5x=15$

$x=-3$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 21: रेहाना ला झग्यावर 24% सुट मिळाली. तीने त्यावरील सुट काढुन 380 रुपये दिले. त्या झग्याची छापील किंमत काढा.

सोडवणुक: समजा त्या झग्याची छापील किंमत x रुपये

x वर 24% ची सुट

दिलेले रुपये x चे $x - 24\%$ म्हणजे 380 रुपये

$$x - 24\% \times x = 380$$

$$= x - \frac{24}{100} \times x = 380$$

$$= \frac{100x - 24x}{100} = 380$$

$$= \frac{76x}{100} = 380$$

$$x = \frac{380 \times 100}{76}$$

$$\therefore \quad x = 500$$

$\therefore$ छापिल किंमत = 500 रुपये

उदाहरण 22: एका संख्येचे चार पंचमांश हे त्या संख्येच्या तिन चतुर्थांश पेक्षा 4 ने मोठी आहे. ती संख्या काढा.

सोडवणुक: समजा, ती संख्या 'x', आहे.

त्या संख्येचे चार पंचमांश $= \frac{4}{5}x$

आणि त्या संख्येचे तिन चतुर्थांश $= \frac{3}{4}x$

$\frac{4}{5}x$ हे $\frac{3}{4}x$ पेक्षा 4 ने मोठे आहे. ते दिले आहे.

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x = 4$$

$$\frac{16x - 15x}{20} = 4$$

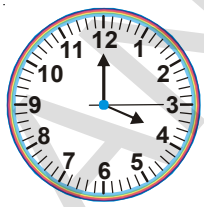
$$\Rightarrow \frac{x}{20} = 4 \quad \Rightarrow x = 80$$

येणारी संख्या = 80.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 23: जॉन ने त्याची घड्याळ 301 रुपयास विकली असता त्याला 14% तोटा झाला. त्या घड्याळीची खरेदी किंमत काढा.

सोडवणुक: समजा, घड्याळीची खरेदी किंमत $= x$ रुपये



त्यावर तोटा = 14% 'x' वर $= \frac{14}{100} \times x = \frac{14x}{100}$

घड्याळीची विक्री किंमत = खरेदी किंमत - तोटा

$$\Rightarrow 301 = x - \frac{14x}{100}$$

$$301 = \frac{100x - 14x}{100}$$

$$301 = \frac{86x}{100}$$

$$\frac{301 \times 100}{86} = x$$

$$350 = x$$

म्हणुन, घड्याळीची खरेदी किंमत = 350 रुपये.

उदाहरण 24: एक माणुस एक विशिष्ट अंतर चालतो. तासी 4 कि.मी. वेगाने तो दोन त्रितीआंश अंतर आणि तासी 5 कि.मी.ने उरलेले अंतर चालतो. जर एकुण वेळ 42 मीनीट लागल्यास एकुण अंतर माहित करा.

सोडवणुक: समजा अंतर 'x' कि.मी. आहे.

	पहिला भाग	दुसरा भाग
चाललेले अंतर	'x'चे $\frac{2}{3} = \frac{2x}{3}$	उरलेले अंतर $= x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$
वेग	तासी 4 कि.मी.	तासी 5 कि.मी.
लागलेला वेळ	$\frac{\frac{2}{3}x}{4} = \frac{2x}{12}$ तास	$\frac{\frac{x}{3}}{5} = \frac{x}{15}$

लागलेला एकुण वेळ $= \frac{2x}{12} + \frac{x}{15}$ तास

SCERT TELANGANA

$$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15})\ \text{hr} = 42\ \text{min}.$$

$$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15})\ \text{hr} = \frac{42}{60}\text{hr}.$$

$$\frac{2x}{12}+\frac{x}{15}=\frac{42}{60}$$

$$\frac{10x+4x}{60}=\frac{42}{60}$$

$$\Rightarrow \quad 14x = 42$$

$$\Rightarrow \quad x = 3$$

एकुण अंतर $x = 3$ कि.मी.

उदाहरण 25: एका अपुर्णांकाचा अंश हा छेदापेक्षा 6 ने लहान आहे. जर अंशात 3 मिळविले असता अपुर्णांक $\frac{2}{3}$, समान होतो. तर खरा अपुर्णांक काढा.

सोडवणुक: समजा अपुर्णाकाचा छेद 'x' आहे तर

तर अपुर्णांकाचा अंश $= x - 6$

म्हणुन अपुर्णांक $= \frac{x-6}{x}$

जर, अंशात 3 मिळविल्यास तो $\frac{2}{3}$ होतो.

$$\Rightarrow \frac{x-6+3}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x-3}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x-9=2x$$

$$x=9$$

$\therefore$ अपुर्णांक $= \frac{x-6}{x} = \frac{9-6}{9} = \frac{3}{9}$

म्हणुन खरा अपुर्णांका $\frac{3}{9}$ आहे.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 26: सीरिशा जवळ पन्नास पैसे आणि पंचेविस पैशाच्या नाण्याचा रुपात 9 रुपये आहेत. तिच्या जवळ पंचेविस पैशाची नाणी पन्नास पैशाच्या नाणीच्या दुप्पट आहे. तर तिच्या जवळ प्रत्येक प्रकारचे एकुण किती नाणे आहे. ?

सोडवणुक: समजा पन्नास पैशाची एकुण नाणी $= x$

म्हणुन पंचेवीस पैशाची एकुण नाणी $= 2x$

पन्नास पैश्याच्या नाण्याची किंमत $= x \times 50$ पैसे $= \frac{50x}{100}$ रुपये $= \frac{x}{2}$ रुपये

पंचेविस पेश्याच्या नाण्याची किंमत $= 2x \times 25$ पैसे $= 2x \times \frac{25}{100}$

$= 2x \times \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$ रुपये

एकुण नाण्यांची किंमत $= \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$

परंतु पैशाची एकुण किंमत 9 रुपये आहे

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 9$

$\frac{2x}{2} = 9$

$\therefore\ x = 9$

पन्नास पैशाची एकुण नाणी $= x = 9$

पंचेविस पैशाची एकुण नाणी $= 2x = 2 \times 9 = 18.$

उदाहरण 27: एक माणुस त्याचे लहान दुचाकी वाहनात 24 कि.मी. / तास वेगाने चालवत त्याला नियुक्ती साठी ठरलेल्या जागी पोहचण्यासाठी त्याला 5 मिनीटे उशीर होतो. जर तो तासी 30 कि.मी. वेगाने चालवल्यास तो इष्टस्थळी 4 मिनीटे अगोदर पोहचतो. तर त्याचे ठराविक स्थळ किती कि.मी. दुर आहे.?

सोडवणुक: समजा ते अंतर 'x' कि.मी. आहे

म्हणुन 24 कि.मी. / तासी वेगाने 'x' कि.मी. अंतर पार करण्यासाठी लागलेला वेळ $= \frac{x}{24}$ तास

30 कि.मी. / तासी वेगाने 'x' कि.मी. अंतर पार करण्यासाठी लागलेला वेळ $= \frac{x}{30}$ तास

SCERT TELANGANA

परंतु त्या दोन्ही वेळेमधील फरक = 9 मिनीट $\frac{9}{60}$ तास दिलेला आहे.

$$\therefore \quad \frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{9}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{5x - 4x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{9}{60} \times 120 = 18$$

अंतर 18 कि.मी. आहे.

अभ्यास - 2.5

1. खालील समीकरणे सोडवा.?

(i) $\frac{n}{5} - \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 14$

(ii) $\frac{z}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z}{6} = 8$ (iv) $\frac{2p}{3} - \frac{p}{5} = 11\frac{2}{3}$

(v) $9\frac{1}{4} = y - 1\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} + \frac{x}{5} + \frac{3x}{10} = \frac{1}{5}$

(vii) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ (viii) $\frac{2x-3}{3x+2} = \frac{-2}{3}$

(ix) $\frac{8p-5}{7p+1} = \frac{-2}{4}$ (x) $\frac{7y+2}{5} = \frac{6y-5}{11}$

(xi) $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}$ (xii) $\frac{3t+1}{16} - \frac{2t-3}{7} = \frac{t+3}{8} + \frac{3t-1}{14}$

2. कोणत्या संख्येचा तिसरा भाग हा पाचव्या भागापेक्षा 4 ने अधिक आहे.?

SCERT TELANGANA

3. दोन घन पुर्णांकातील फरक 36 आहे. एका पुर्णांकास दुसऱ्या पुर्णाकाने भाग दिल्यास भागाकार 4 येतो तर पुर्णांक माहित करा.

(सुचना : जर एक संख्या 'x', तर दुसरी संख्या '$x - 36$')

4. एका अपुर्णांकाचा अंश हा छेदापेक्षा 4 ने कमी आहे. जर अंश आणि छेदात 1 मिळविल्यास $\frac{1}{2}$ येते तर अपुर्णांक काढा.

5. तिन क्रमवार संख्या माहित करा ज्यांना 10,17 आणि 26 ने अनुक्रमे भाग दिल्यास त्यांच्या भागाकराची बेरीज 10 येते.

(सुचना : समजा क्रमवार संख्या $= x, x+1, x+2$, तर $\frac{x}{10}+\frac{x+1}{17}+\frac{x+2}{26}=10$)

6. 40 विद्यार्थ्यांच्या वर्गात मुलींची संख्या मुलाच्या संख्येच्या तिन पंचमांश आहे. वर्गातील मुलांची संख्या काढा.

7. मेरीचे वय 15 वर्षानंतर तिच्या आजच्या वयाच्या चारपट होते. तिचे आजचे वय काढा.

8. अरविंद जवळ लहान मुलांचा बॅक आहे. त्यांने तो एक रुपया आणि पन्नास पैशाने तो पुर्ण भरला. त्यात एक रुपयापेक्षा तिनपट पन्नास पैशाची नाणी आहे. त्या बॅकेत एकुण 35 रुपये असल्यास त्या बँकेत प्रत्येक प्रकारची किती नाणी आहेत.?

9. A आणि B दोघे मिळुन एक काम 12 दिवसात पुर्ण करते. जर 'A' हा एकटाच ते काम 20 दिवसात पुर्ण केल्यास B एकटा ते काम किती दिवसात पुर्ण करतो.?

10. जर रेल्वे तासी 40 कि.मी. वेगाने धावत असल्यास ती इष्टस्थळी 11 मिनीटे उशीरा पोहाचते. जर ती तासी 50 कि.मी. वेगाने धावल्यास फक्त 5 मिनीटे उशीरा पोहोचते. रेल्वे ने पार पाडलेले अंतर माहित करा.

11. हरणाच्या एक चतुर्थांश कळप जंगलात गेला एकुण पैकी एक तृतीअंश शेतात चरत आहे आणि उरलेले 15 नदीच्या किनाऱ्यावर पाणी पीत आहेत. हरणांची एकुण संख्या काढा.

12. दुकानदाराने रेडीओ 903 रुपयाला विकल्यास 5%. नफा होतो. रेडीओची खरेदी किंमत काढा.

13. शेखरने आपल्या मिठाईतील पाव मिठाई रेणु ला आणि नंतर राजुला 5 मिठाई दिली. त्याच्या जवळ 7 मिठाई उरली . त्याच्या जवळ अगोदर एकुण किती मिठाई होती.?

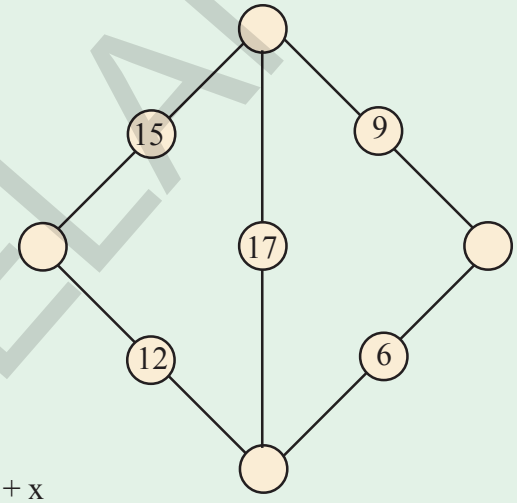
SCERT TELANGANA

आपण काय चर्चा केली.?

1. जर समीकरणाचा कोटी एक असेल तर त्यास रेषीय समीकरण म्हणतात.
2. जर रेषीय समीकरणात फक्त एकच चल असल्यास त्यास एक चलातील रेषीय समीरकण किंवा साधे समीकरण म्हणतात.
3. दिलेल्या समीकरणात जेव्हा चलासाठी एक किंमत प्रस्थापित करतो तेव्हा डावी बाजु = उजवी बाजु होते यास उकल किंवा दिलेल्या समीकरणाची मुळ म्हणतात.
4. संख्या, चलांना समीकरणाच्या एका बाजु कडुन दुसऱ्या बाजुकडे नेता येते.

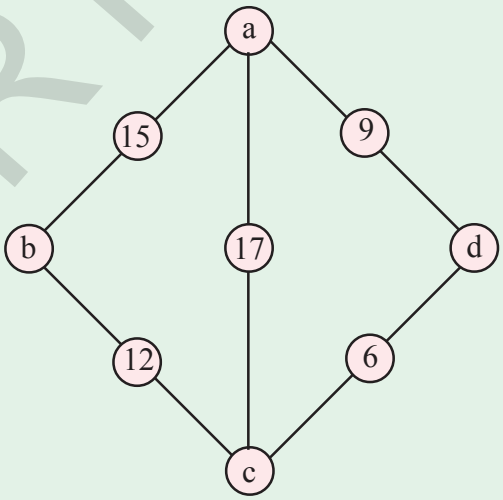
जादुचे डायमंड

डायमंडला प्रत्येक रेषेत अशा रितीने मांडा की, प्रत्येक रेषेतील संख्या समान असायला हवी. रिकाम्या वर्तुळात योग्य रितीने भरा.



संख्या या रुपात असायला पाहिजेत

$a = x, b = 5 + x, c = 3 + x, d = 11 + x$



x ही कोणतीही संख्या असुन प्रत्येक रेषेतील एकुण संख्या $20 + 2x$ होते.

उदा. जर $x = 1$, तर $a = 1, b = 6, c = 4, d = 12$ होते. प्रत्येक रेषेचा एकुण संख्या 22होते.

SCERT TELANGANA

धडा 3

चौकोणाची रचना

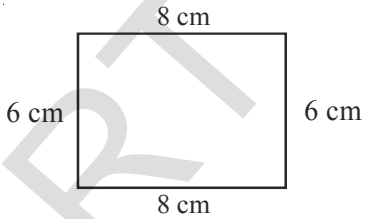
3.0 परिचय

आपण आपल्या भोवती शेतं, घरं, पुल, रेल्वेचे रुळ शाळेच्या इमारती, खेळाचे मैदान इत्यादी पाहातो. पतंग, लुडी, कॅरम, बोर्ड, खिडक्या, फलक बोर्ड, आणि भोवती असणाऱ्या इतर वस्तु सुध्दा बघतो. जेव्हा आपण ह्या वस्तु काढतो. त्या वस्तु कशा दिसतात?या सर्वात मुलभुत भुमीतीय आकार काय आहे ? यापैकी जास्तीत जास्त आकृत्या चार बाजु असलेल्या चौकोणाच्या आकारात आहेत.

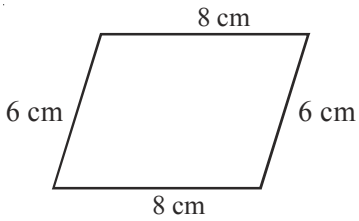
कमल आणि जोसेफ 8 सें.मी. लांबी आणि 6 सें.मी. रुंदी च्या मापाची चौकट बनविण्यासाठी आकृती काढत आहेत.

एकमेकांच्या आकृत्याकडे न पाहता त्यांनी आकृत्या काढल्या.

कमल



जोसेफ



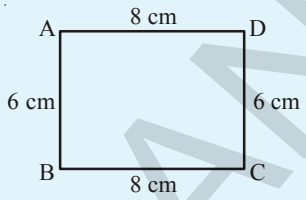
दोन्ही आकृत्या सारख्या आहेत का ?

दोन्ही आकृत्या सारख्या मापाचे चौकोन असुन त्याचा आकार सारखा नाही. हे आपणास दिसुन आले आहे. आपण सातव्या वर्गात त्रिकोणाच्या विशिष्टते बद्दल चर्चा केली . विशिष्ट त्रिकोणासाठी तुम्हाला कोणत्याही तिन मापांची गरज आहे. ते तिन बाजु किंवा दोन बाजु आणि एक मिळुन असलेला कोन, दोन कोन आणि बाजु इत्यादी विशिष्ट चौकानाची रचना करण्यासाठी किती मापाची गरज पडते. विशिष्ट चौकोन म्हणजेच वेगवेगळ्या व्यक्तींनी सारख्या मापांनी बनविलेला चौकोन एक रुप असतो.

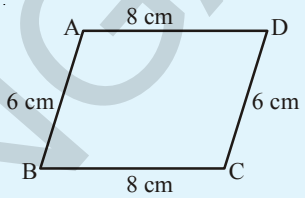
SCERT TELANGANA

हे करा:

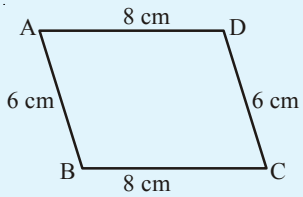
8 सें.मी. लांबी असलेल्या दोन काड्या घ्या. 6 सें.मी. लांबीच्या दुसऱ्या दोन समान काड्या घ्या. 8 सें.मी. लांबी आणि 6 सें.मी. रुंदीचा आयत येण्यासारखी त्याची रचना करा. उपलब्ध असलेल्या या 4 मापावरुन हा आयत तयार होतो. आता फक्त त्याच्या रुंदीला थोडे सरकवा आता तो सारखा दिसतो का?आता तुम्हाला एक नविन आकाराचा आयत येतो आकृती (ii) कडे पहा आता तो आयत समांतर भुज चौकोण होतो. तुम्ही त्या कांड्यांना बदलतात का?नाही. बाजुंची मापं सारखीच आहेत. अजुन काही कांड्यांना सरकवुन समोरील बाजुच्या दिशेने आकारात बदल होऊन नविन आकराची आकृती येते. तुम्हाला कशी आकृती येते. तुम्हाला वेगवेगळ्या प्रकाराचा समांतर भुज चौकोण येतो. आकृती (iii). मध्ये अद्याप त्याची मापे समान आहेत. चौकोणाची 4 मापे त्यांचे वैशिष्ट निश्चित करत नाही. म्हणुन आता किती मापे चौकोनाची वैशिष्ट ठरविते ? चला, कृत्याकडे वळु या.!



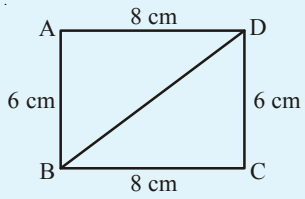
(i)



(ii)



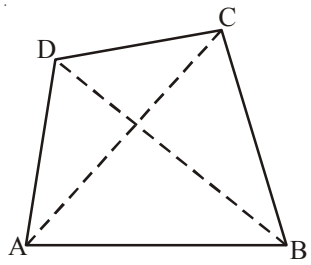
(iii)



(iv)

तुम्ही प्रत्येकी 8 सें.मी.लांबीच्या दोन काड्या आणि दुसऱ्या प्रत्येकी 6 सें.मी. लांबीच्या दोन काड्यांनी आयताची रचना केली. आता एक अजुन BD ला समान असणारी काडी जोडा, आणि त्यास आकृतीत (iv) दाखविल्या प्रमाणे BD वर ठेवा. आता तुम्ही रुंदीला सरकविल्यास आकर बदलते का?नाही. आकृती उघडल्या शिवाय बदलत नाही. पाचव्या काडीला वापरल्यास आयताची विशिष्टता तिच राहते. म्हणजे दुसरा चौकोन तयार होने शक्य नाही.(दिलेल्या बाजुंच्या लांबीवरुन) अशा प्रकारे पाच मापाव्दारे चौकानाची विशिष्टांना निश्चित करता येते. हे दिसुन आले. परंतु कोणतेही पाच मापे(बाजु आणि कोन)चौकानाची विशिष्टता काढण्यासाठी पर्याप्त आहे का?

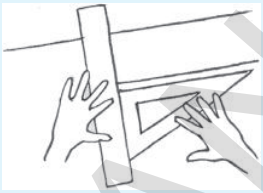
3.1 चौकोण आणि त्याचे गुणधर्म:



आकृतीत ABCD हा चौकोन आहे. त्यांचे शिरोबिंदु A, B, C, D आणि बाजु ; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. आहेत ABCD चे कोन $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ आणि $\angle DAB$ आहेत. आणि कर्ण $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. आहेत.

SCERT TELANGANA

हे करा.



उपकरण

मोजपट्टी, गुण्या, कोनमापकाची गरज आहे.

लक्षात ठेवा :

जर रेषा समांतर आहे किंवा नाही हे तपासण्यासाठी

गुण्याला पहिल्या रेषेवरुन दुसऱ्या रेषेवर बाजुच्या आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे सरकवा

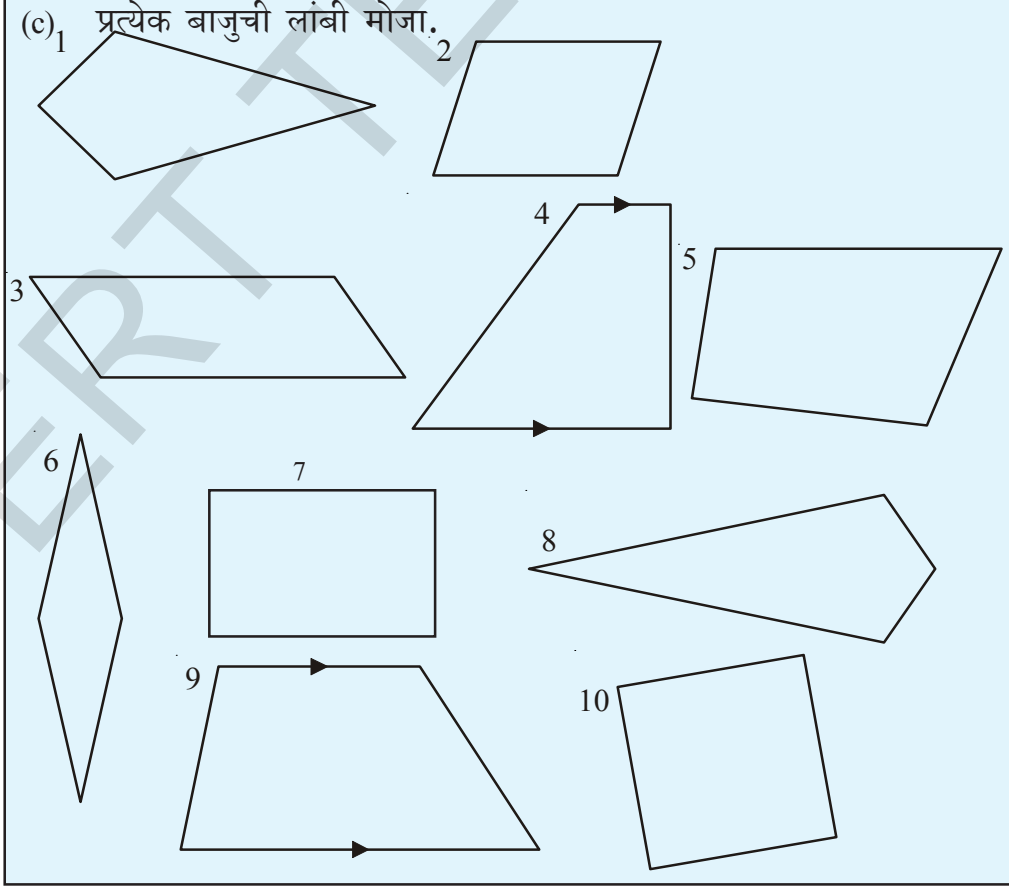
आता, प्रत्येक चौकोनासाठी योग्य उपकरनाचा वापर करुन विचारपुस करा.

प्रत्येक चौकानास

(a) विरुध्द बाजु समांतर आहे का पहा.

(b) प्रत्येक कोन मोजा

(c) प्रत्येक बाजुची लांबी मोजा.



SCERT TELANGANA

तुमच्या पाहणीची नोंद करुन खालील सारणी पुर्ण करा.

चौकोन	समांतर बाजुच्या दोन जोड्या	समांतर बाजुची एक जोडी	चार काटकोन	विरूध्द बाजु समान असलेल्या दोन जोडया	विरूध्द कोन समान असलेल्या दोन जोडया	लगतच्या समान बाजुच्या दोन जोडया	4 समान बाजु
1	×	×	×	×	×	✓	×
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

समांतर भुज चौकोन हा 2 जोड्या समांतर बाजु असलेला चौकोन आहे.

(a) कोणते आकार समांतर भुज चौकोन आहे.?

(b) समांतर भुज चौकोनाचे इतर गुणधर्म कोणते आहेत.?

आयत हे चार काटकोन असलेले समांतरभुज चौकोन आहेत.

(a) कोणते आकार आयत आहेत.?

(b) आयताला कोणते गुणधर्म असतात.?

समभुज चौकोन हा चार समान बाजु असलेला समांतर भुज चौकोन आहे.

(a) समभुज चौकोन कशाला म्हणतात.?

(b) समभुज चौकोनाचे गुणधर्म काय आहेत. ?

चौरस हा चार काटकोन असणारा समभुज चौकोन आहे.

(a) कोणते आकार चौरस आहे.?

(b) चौरसाला कोणते गुणधर्म असतात.?

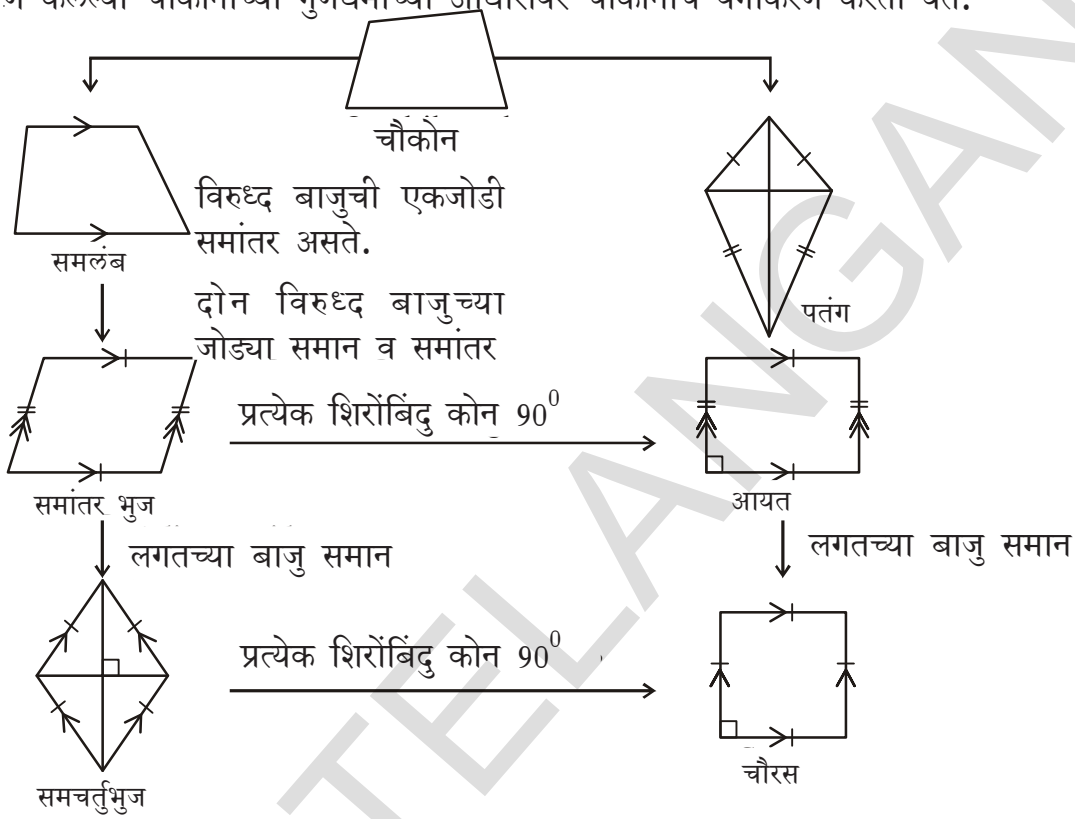
समलंब चौकोन हा एक जोडी समांतर भुज असणारा चौकोन आहे.

(a) कोणत्या आकाराच्या चौकोनाला समलंब चौकोन असे म्हणतात?

(b) समलंब चौकोनाचे गुणधर्म कोणते?

SCERT TELANGANA

1 आणि 8 चौकोन पतंगी आहेत. पतंगाचे काही गुणधर्म लिहा.
तुम्ही निरिक्षण केलेल्या चौकोनाच्या गुणधर्माच्या आधारावर चौकोनाचे वर्गीकरण करता येते.



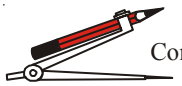
विचार करा- चर्चा करा आणि लिहा :

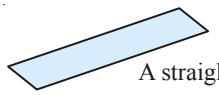
1. प्रत्येक आयत समांतर भुज चौकोन होतो का? प्रत्येक समांतर भुज चौकोन आयत होतो का ?
2. उमाने गुडाची पापडी बनवली तीला ती आयताकार हवी होती. किती निरनिराळ्या प्रकारे ती आयताकार होते याची पडताळणी करु शकते ?

हे करा

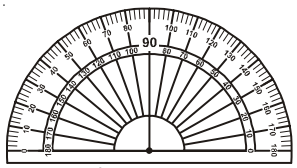
तुम्ही 60^0 चा कोन काढु शकता काय

वापर करा





वापरु नका

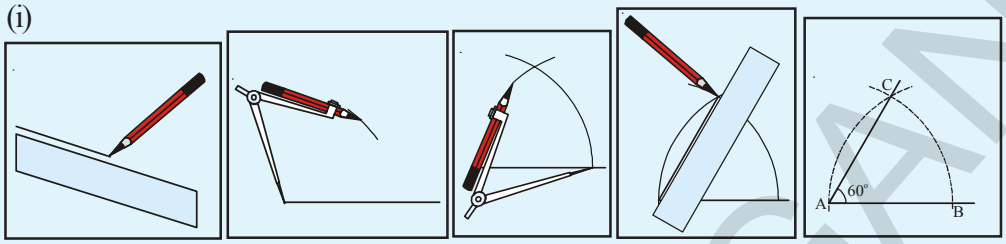


कोनमापक

SCERT TELANGANA

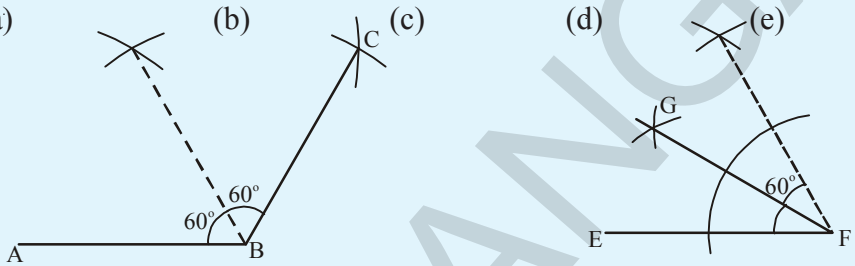
खालील स्पष्टीकरणाचे निरिक्षण करुन रचनेच्या पायऱ्या लिहा.?

(i)



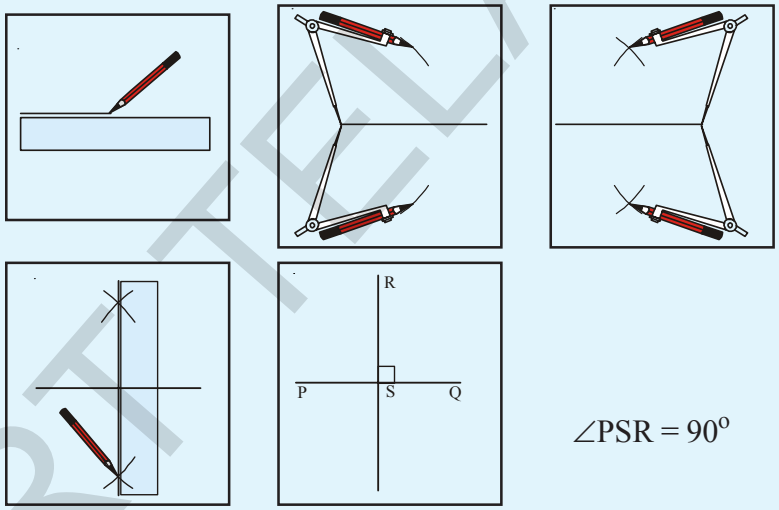
(a) (b) (c) (d) (e)

(ii)



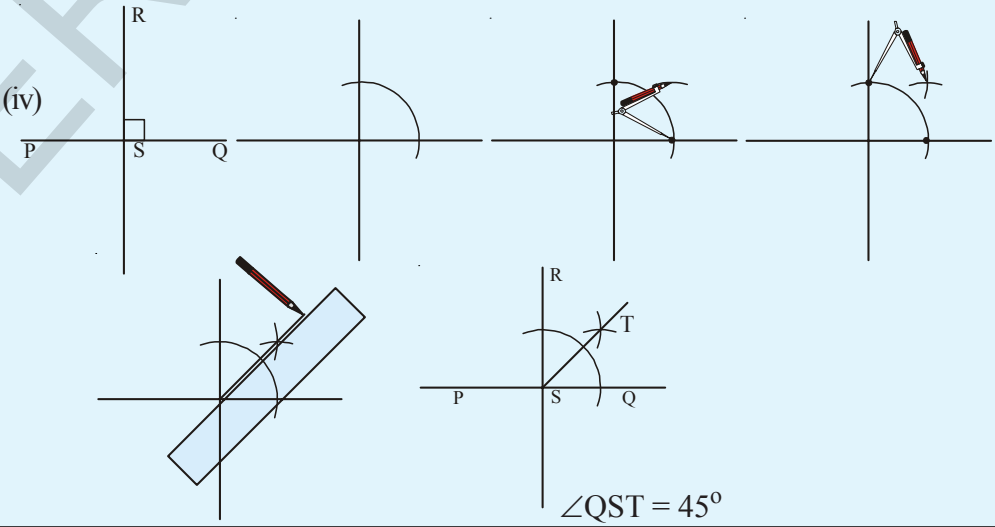
$\angle ABC = 120^o$ $\angle EFG = 30^o$

(iii)



$\angle PSR = 90^o$

(iv)



$\angle QST = 45^o$

SCERT TELANGANA

3.2 चौकोनाची रचनाः

खालील मापे दिली असता आपण चौकोन काढु शकतो.

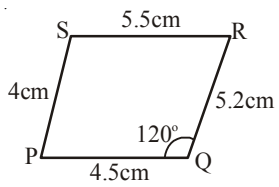
1. जेव्हा चार बाजु आणि एक कोन दिला असता (बा.बा.बा.बा.को.)
2. जेव्हा चार बाजु आणि एक कर्ण दिला असता (बा.बा.बा.बा.क.)
3. जेव्हा तीन बाजु आणि दोन कर्ण दिले असता (बा.बा.बा.क.क.)
4. जेव्हा दोन सलंग्न बाजु आणि तीन कोन दिला असता (बा.को.बा.को.को.)
5. जेव्हा तीन बाजु आणि दोन समाविष्ठ कोन दिला असता (बा.को.बा.को.बा.)

3.2.1 रचना : चार बाजूंची लांबी आणि एक कोन दिला असता. (बा.बा.बा.बा.को.)

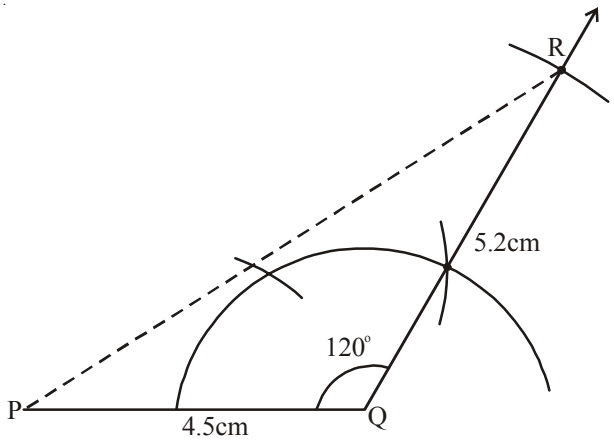
उदाहरण 1 : PQRS चौकोनाची रचना करा ज्या मध्ये PQ = 4.5 सें.मी., QR = 5.2 सें.मी., RS = 5.5 सें.मी., PS = 4 सें.मी. आणि $\angle PQR = 120^o$.

सोडवणुक :

पायरी 1 : चौकोनाची अंदाजी आकृती काढुन दिलेल्या मापांची त्यावर खुण करा. हे पुरे आहे का ?

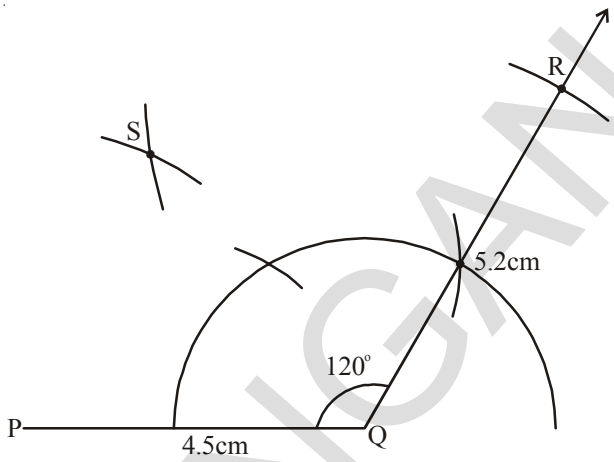


पायरी 2 : बा.को.बा.गुणधर्मचा वापर करुन ΔPQR रचना करा PQ = 4.5 सें.मी. $\angle PQR = 120^o$ आणि QR = 5.2 सें.मी..

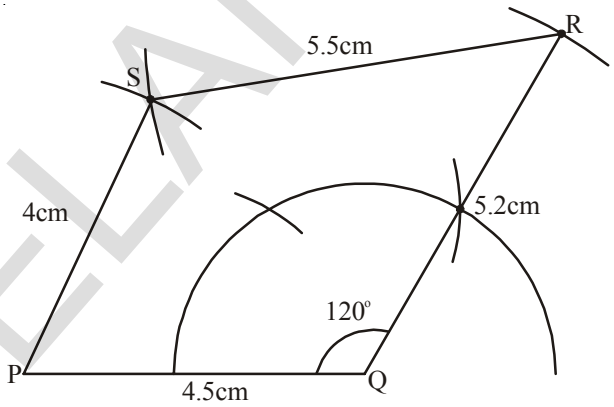


SCERT TELANGANA

पायरी 3 : चौथा शिरोबिंदु 'S' चे स्थान ओळखण्यासाठी P केंद्रबिंदुवरुन आणि 4 सें.मी. (PS = 4 cm) त्रिजेचा एक चाप काढा. R केंद्रबिंदु वरुन 5.5 सें.मी. (RS = 5.5 cm) S बिंदुवर अगोदर च्या चापास छेदणारा दुसरा चापकर्ण काढा.



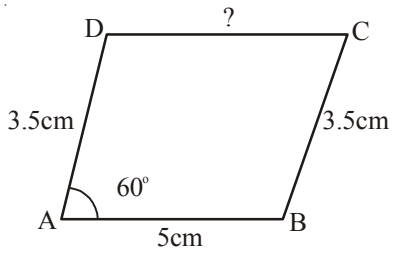
पायरी 4 : PQRS चौकोन तयार होण्यासाठी PS आणि RS ला जोडा.



उदाहरण 2 : AB = 5 सें.मी., BC = 3.5 सें.मी.आणि $\angle A = 60^o$ दिले असता ABCD समांतर भुज चौकोनाची रचना करा.

सोडवणुक:

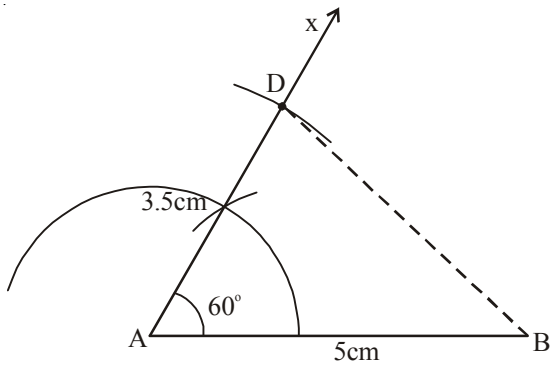
पायरी 1 : समांतर भुज चौकोनाची अंदाजी आकृती काढुन (विशेष प्रकारचा चौकोन) दिलेल्या मापाची खुण करा.



येथे आपणास 3 मापे दिली आहेत. ABCD समांतरभुज चौकोन असल्यामुळे आपण त्यास असे लिहु शकतो. CD = AB = 5 सें.मी. आणि AD = BC = 3.5 सें.मी. (कसे ?)

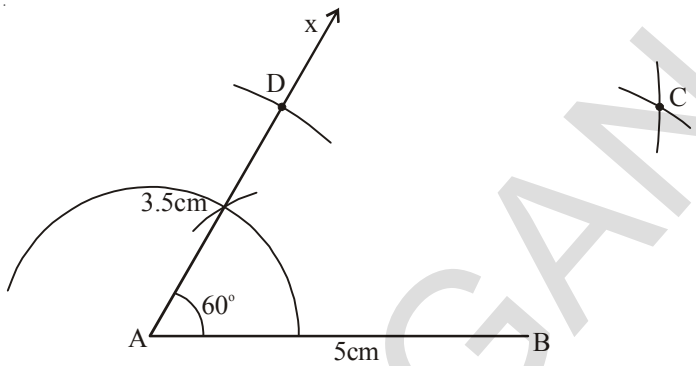
(आता आपणास एकुण 5 मापे मिळालीत.).

पायरी 2: AB = 5सें.मी., $\angle A = 60^o$ आणि AD = 3.5 सें.मी. चा वापर करुन ΔBAD काढा.

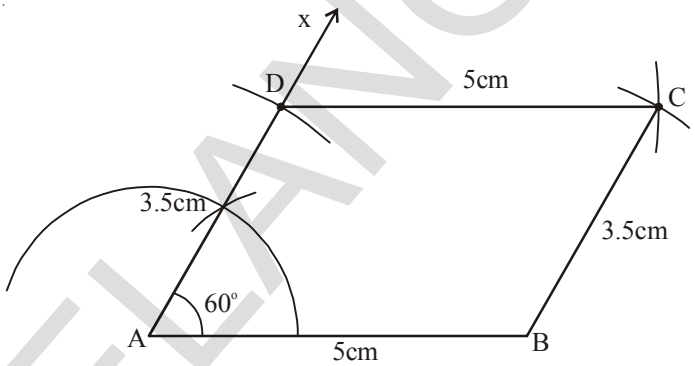


SCERT TELANGANA

पायरी 3: BC=3.5सें.मी. आणि DC =5 सें.मी. या दोन मापाचा वापर करुन चौथा शिरोबिंदु 'C' निश्चित करा.



पायरी 4 : ABCD समांतर भुज चौकोन येण्यासाठी B, C आणि C, D जोडा.



(मोजपट्टी आणि कोनमापकाच्या साहाय्याने समांतरभुज चौकोनाचे गुणधर्म पडताळुन पहा.)

चला, चौकोनाच्या रचनेच्या पायऱ्याचे सामान्य करण पाहु या.

पायरी 1: अंदाजी आकृती काढा.

पायरी 2 : दिलेली मापे पुरेशी नसल्यास आकृतीचे विश्लेषण करा. अपेक्षा केलेली मापे येण्यासाठी आकृतीच्या विशेष गुणधर्माचा वापर करण्याचा प्रयत्न करा.

पायरी 3 : पाच मापापैकी तिन मापांवरुन त्रिकोन काढा. आणि इतर मापाचा वापर चौथा शिरोबिंदु निश्चित करण्यासाठी करा.

पायरी 4: रचनेच्या पायऱ्याचे सविस्तर पणे वर्णन करा.

अभ्यास - 3.1

खाली दिलेल्या मापावरुन चौकोनाची रचना करा. रचनेच्या पायऱ्या लिहा.

(a) ABCD चौकोन काढा त्यात AB = 5.5 सें.मी., BC = 3.5 सें.मी., CD = 4 सें.मी., AD = 5 सें.मी. आणि $\angle A = 45^o$.

(b) BEST चौकोन काढा त्यात BE = 2.9 सें.मी., ES = 3.2 सें.मी., ST = 2.7 सें.मी., BT = 3.4 सें.मी. आणि $\angle B = 75^o$.

(c) PQRS समांतर भुज चौकोन काढा, PQ = 4.5 सें.मी., QR = 3 सें.मी.आणि $\angle PQR = 60^o$.

SCERT TELANGANA

(d) MATH समभुज चौकोन काढा AT = 4 सें.मी., $\angle MAT = 120^o$.

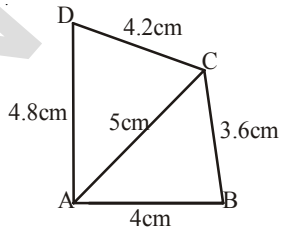
(e) FLAT आयत काढा त्यात FL = 5 सें.मी., LA = 3 सें.मी.

(f) LUDO चौरस काढा जेथे LU = 4.5 सें.मी.

3.2.2 चार बाजुची लांबी आणि कर्ण दिला असता चौकोनाची रचना करणे (बा.बा.बा.बा.क.)

उदाहरण 3 : AB = 4 सें.मी., BC = 3.6 सें.मी., CD = 4.2 सें.मी., AD = 4.8 सें.मी. आणि AC = 5 सें.मी.असल्यास ABCD चौकोनाची रचना करा.

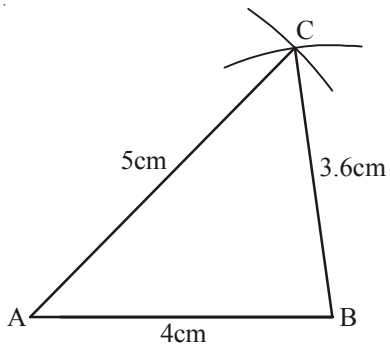
सोडवणुक :



पायरी1: दिलेल्या माहितीवरुन ABCD चौकानाची अंदाजी आकृती काढा.

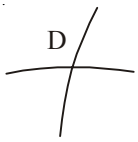
(दिलेली माहिती चौकोन काढण्यासाठी पुरेसी आहे किंवा नाही याचे विश्लेषण करा.

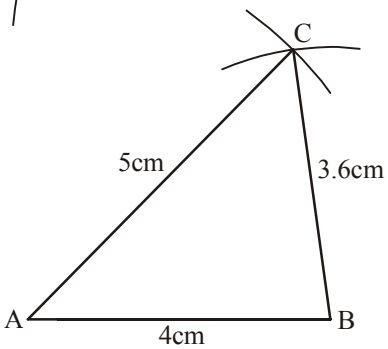
जर माहिती पुरेशी असल्यास समोर चला. जर पुरेशी माहिती नसेल तर दिलेली आकृती काढण्यासाठी पुरेशी नाही याचा निष्कर्ष काढा.).



पायरी 2: AB = 4 सें.मी., BC = 3.6 सें.मी. आणि AC = 5 सें.मी.घेऊन ΔABC ची रचना करा

पायरी 3: आपणास चौथा शिरोबिंदु 'D'. निश्चित केला पाहिजे. तो. AC. च्या बाजुवर असु शकतो. म्हणुन A केंद्रबिंदुवरुन 4.8 सें.मी. त्रिजेचा (AD = 4.8 सें.मी.) चाप काढा आणि C बिंदुवर 4.2 सें.मी. (CD = 4.2 सें.मी.) पाहिल्या चापला D

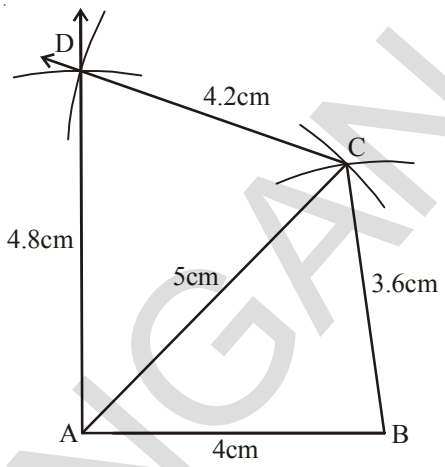




SCERT TELANGANA

वर छेदणारा दुसरा चाप काढा.

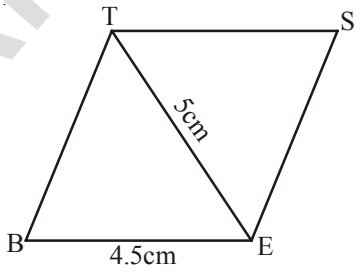
पायरी 4: ABCD चौकोन पुर्ण होण्यासाठी A, D आणि C, D ला जोडा.



उदाहरण 4: BE = 4.5 सें.मी. आणि ET = 5 सें.मी. मापाचा BEST समभुज चौकोन काढा.

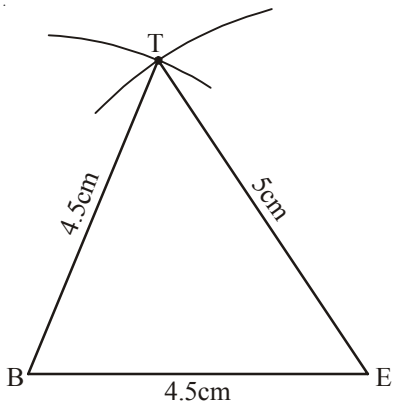
सोडवणुक :

पायरी 1 : समभुज चौकोनाची अंदाजी आकृती काढा. (विशेष प्रकारचा चौकोन). सर्व बाजु समान आहे म्हणुन BE = ES = ST = BT = 4.5 सें.मी. आणि दिलेल्या मापाच्या खुणा करा.

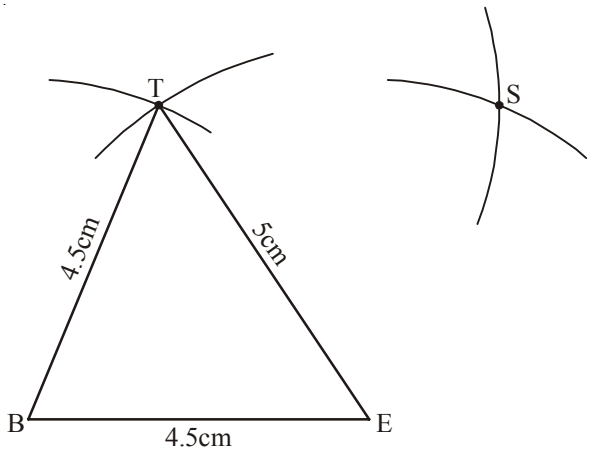


आता, आपण या मापांवरुन आकृतीची रचना करु शकतो.

पायरी 2 : बा.बा.बा. गणुधर्मा वरुन ΔBET काढा ज्यामध्ये BE = 4.5 सें.मी., ET = 5 सें.मी. आणि BT = 4.5 सें.मी. आहे.

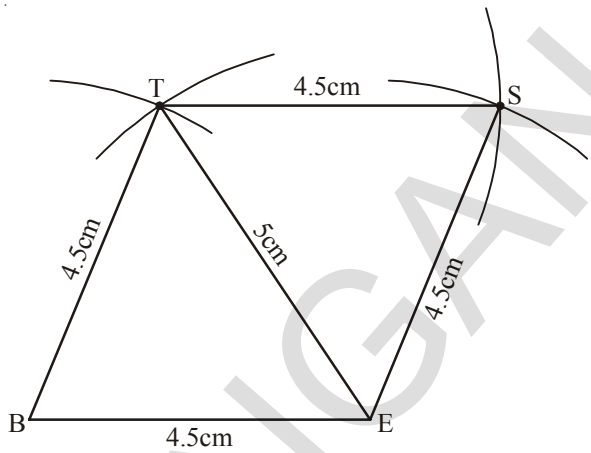


पायरी 3 : उरलेल्या दोन ES = 4.5 सें.मी. आणि ST = 4.5 से.मी. मापावरुन चौथा शिरोबिंदु 'S', निश्चित करण्यासाठी एक चाप काढा.



SCERT TELANGANA

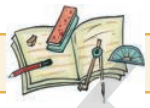
पायरी 4 : अपेक्षीत समभुज चौकोन BEST. येण्यासाठी E, S आणि S, T ला जोडा.



प्रयत्न करा.

1. BA = 5 सें.मी., AT = 6 सें.मी. आणि AS = 6.5 सें.मी. BATS समांतर भुज चौकोन तुम्ही काढु शकता काय ? स्पष्ट करा ?
2. विद्यार्थ्यांनी चौकोन PLAY काढण्याचा प्रयत्न केला ज्या मध्ये PL = 3 सें.मी., LA = 4 सें.मी., AY = 4.5 सें.मी., PY = 2 से.मी. आणि LY = 6 सें.मी.मापे दिली आहेत. परंतु तो काढु शकला नाही का ?

   चौकोन काढण्याचा तुम्ही स्वतः प्रयत्न करा आणि कारणे द्या.



अभ्यास - 3.2

खाली दिलेल्या मापनावरुन चौकानाची रचना करा.

(a) ABCD चौकोन काढा त्यात AB = 4.5 सें.मी., BC = 5.5 सें.मी., CD = 4 सें.मी., AD = 6 सें.मी.आणि AC = 7 सें.मी.

(b) PQRS चौकोन काढा त्यात PQ = 3.5 सें.मी., QR = 4 सें.मी., RS = 5 सें.मी., PS = 4.5 सें.मी. आणि QS = 6.5 सें.मी.

(c) ABCD समांतर भुज चौकोन काढा ज्यामध्ये AB = 6सें.मी., CD = 4.5 सें.मी. आणि BD = 7.5 सें.मी.

(d) समभुज चौकोन NICE काढा ज्यामध्ये NI = 4 सें.मी. आणि IE = 5.6 सें.मी.

3.3.3 तिन बाजुंची लांबी आणि दोन कर्ण दिले असता चौकोनाची रचना करणे. (बा.बा.बा.क.क.)

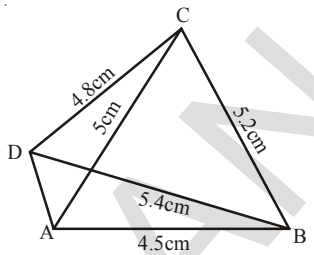
उदाहरण 5 : AB = 4.5 सें.मी., BC = 5.2 सें.मी., CD = 4.8 सें.मी. आणि कर्ण AC = 5 सें.मी. BD = 5.4 सें.मी.दिले असता ABCD चौकोनाची रचना करा.

SCERT TELANGANA

उदाहरण :

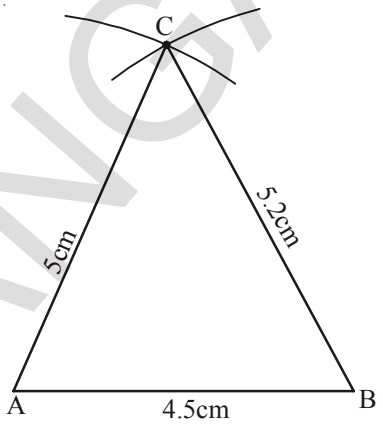
पायरी 1: ABCD चौकोनाची अंदाजी आकृती काढा. त्यात दिलेल्या मापाची खुण करा.

(उपलब्ध मापावरुन ΔABC ची रचना करणे शक्य आहे का ?)



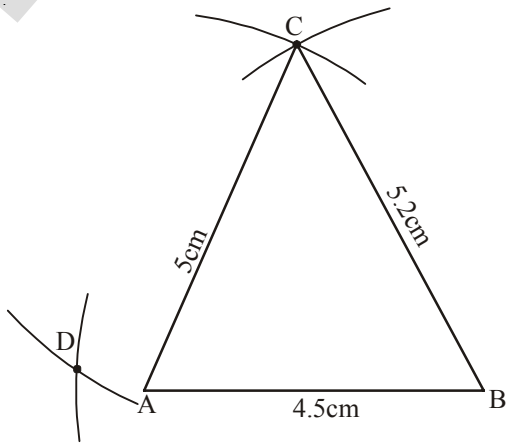
पायरी 2: बा.बा.बा. गणुधर्मानुसार ΔABC ची रचना करा. ज्यात

AB = 4.5 सें.मी., BC = 5.2 से.मी. आणि AC = 5 सें.मी.

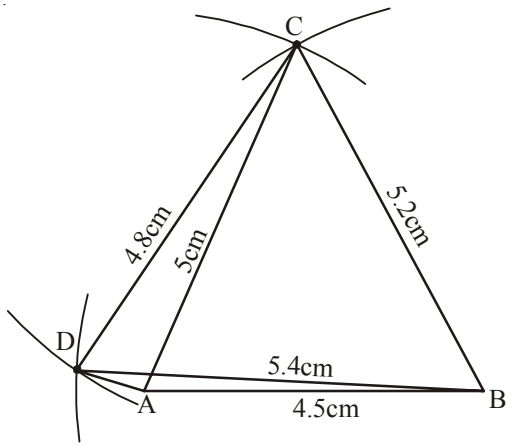


पायरी 3: B केंद्रबिंदुवर 5.4 सें.मी. त्रिज्येची आणि C केंद्रबिंदुवर

4.8 सें.मी. त्रिजेचे B शिरोबिंदु च्या विरुध्द D बिंदु निश्चित करण्यासाठी दोन चाप काढा.



पायरी 4: ABCD चौकोन पुर्ण होण्यासाठी C,D, B,D आणि A,D ला जोडा.



SCERT TELANGANA

विचार करा - चर्चा करा आणि लिहा.

1. ΔABD ची रचना पहिले करुन नंतर चौथा शिरोबिंदु 'C' काढुन ABCD चौकोनाची रचना करु शकता का ? कारणे द्या.
2. PQ = 3 सें.मी., RS = 3 सें.मी., PS = 7.5 सें.मी., PR = 8सें.मी. आणि SQ = 4 सें.मी. मापांसोबत PQRS चौकोनाची रचना करा. उत्तर पडताळुण पहा.

अभ्यास - 3.3

खाली दिलेल्या मापावरुन चौकोनाची रचना करा.

(a) चौकोन GOLD काढा ज्यात OL = 7.5 सें.मी., GL = 6 सें.मी., LD = 5 सें.मी., DG = 5.5 सें.मी. आणि OD = 10 सें.मी.

(b) चौकोन PQRS काढा ज्यात PQ = 4.2 सें.मी., QR = 3 सें.मी., PS = 2.8 सें.मी., PR = 4.5 सें.मी.आणि QS = 5 सें.मी..

3.3.4 दोन सलंग्न बाजु आणि तिन कोन दिले असता चौकानाची रचना करणे. (बा.को.बा.को.को.)

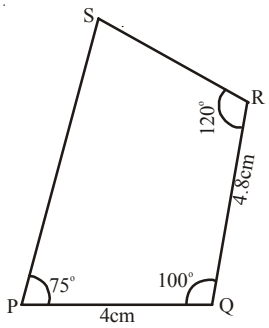
आपण, अपेक्षीत चौकोनाची रचना करु शकतो. परंतु काही कोन दिले आहे म्हणुन मोजपट्टी आणि कंपास चा वापर कोनमापक कोन मोजण्यासाठी वापरतो.

उदाहरण 6 : PQRS चौकोन काढा, PQ = 4 सें.मी., QR = 4.8 सें.मी., $\angle P = 75^o$ $\angle Q = 100^o$ आणि $\angle R = 120^o$. दिले आहे.

> पुर्ण भागात कोनास 360° समान भागात विभागले आहे. जसे 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120° आणि 180° यालाच प्रामाणिक कोन म्हणतात.

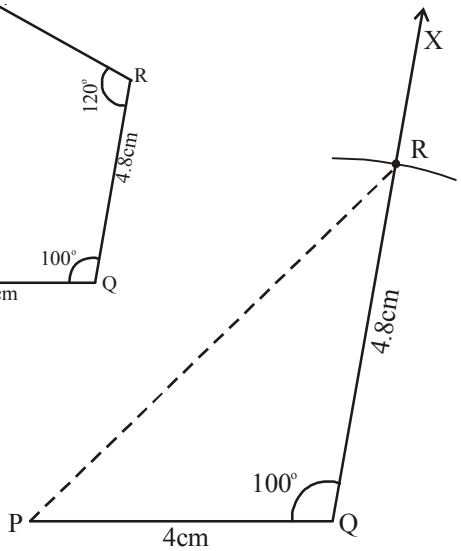
सोडवणुक :

पायरी 1 : आपण चौकोनाची अंदाजी आकृती काढुन दिलेल्या मापाची खुण करावी. योग्य उपकरणाची निवड करुन कोन काढा.



पायरी 2: बाजु कोन बाजु या गुणधर्माचा उपयोग करुन दिलेल्या मापावरुन PQ = 4 सें.मी., $\angle Q = 100^o$ आणि QR = 4.8 सें.मी. ΔPQR ची रचना करा.

(PR ला जोडण्यासाठी बिंदुरेषेचा वापर का करतात? याचा दुसऱ्या पायरीत निषेध करा.)



SCERT TELANGANA

पायरी 3: $\angle P = 75^o$ ची रचना करुन $\overrightarrow{PY}$ काढा.

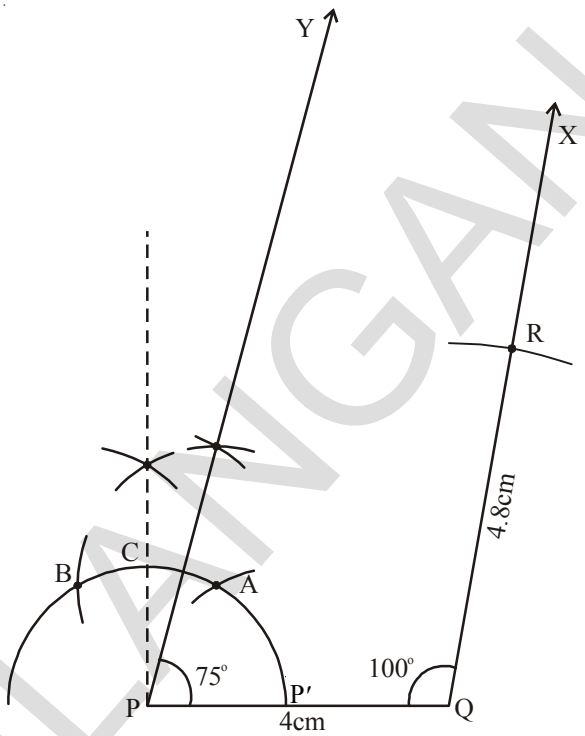
[75° कसे काढायचे तुम्हाला समजले का ?

(a) P. पासुन एक चाप काढा. समजा तो PQ ला P′. बिंदुवर छेदतो. P′ केंद्रबिंदु वरुन सारख्याच त्रिजेचे A, B दोन बिंदुवर 60° आणि 120^oकोन करणारे आणि त्या दोन बिंदुवर छेदणारे दोन चाप काढा.

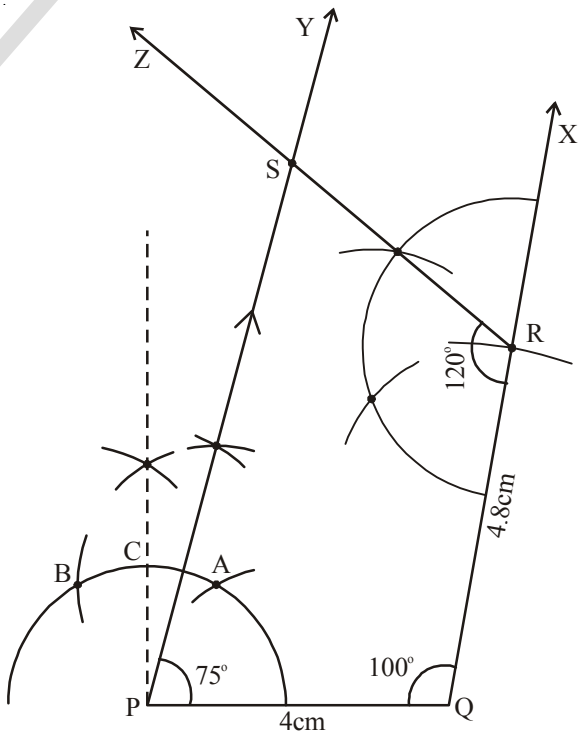
(b) A,B बिंदुपासुन कोन दुभाजकाची रचना करा.ती C बिंदुवर 90° कोन करते आणि चापास छेदते.

(c) A, C पासुन कोन दुभाजक काढा.

(60° आणि 90° मध्यीका) 75^oआहे.]



पायरी 4: $\angle R = 120^o$ ची रचना करा. आणि $\overrightarrow{RZ}$ काढा जो $\overrightarrow{PY}$ ला S वर मिळते. PQRS हा येणारा चौकोन आहे.



SCERT TELANGANA

विचार करा- चर्चा करा आणि लिहा.

1. जर आपणास P बिंदुवर 75° चा कोना ऐवजी 100° चा कोन दिला असता PQRS चौकानाची रचना तुम्ही करु शकता काय? कारणे द्या.

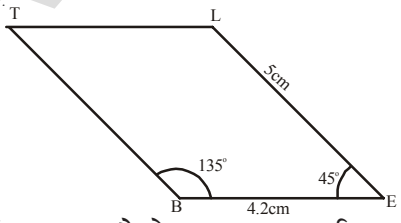
2. जर PL = 6 सें.मी., LA = 9.5 सें.मी., $\angle P = 75^o$, $\angle L = 15^o$ आणि $\angle A = 140^o$ दिला असता PLAN चौकोनाची रचना करु शकता का?

(प्रत्येक संदर्भात कच्ची आकृती काढा. आणि आकृतीचे विश्लेषण करा.) तुमच्या निष्कर्षाची कारणे सांगा व चर्चा करा.

उदाहरण 7 : BE = 4.2 सें.मी, EL = 5 सें.मी., $\angle T = 45^o$ दिले असता BELT समांतर भुज चौकोनाची रचना करा.

सोडवणुक :

पायरी 1: समांतर भुज चौकोन BELT कच्चे चित्र रेखाटा आणि दिलेल्या मापनाची खुण करा. (रचनेसाठी ते पुरे आहेत का ते तपासुन पहा.?)



विश्लेषण :

दिलेली माहिती रचनेसाठी पुरेशी नाही आपणास समांतर भुज चौकोनाच्या गुणधर्मावरुन आवश्यक माहिती काढली पाहिजे.

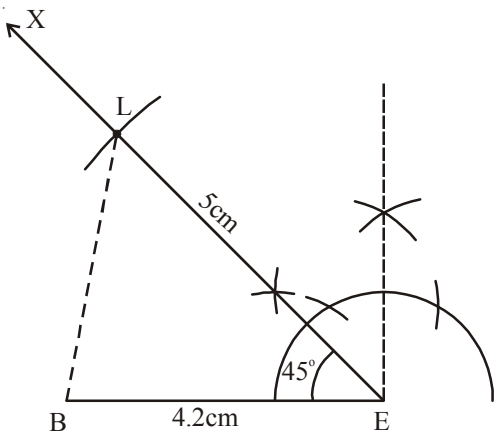
समांतर भुज चौकोनात विरुध्द कोन समान असतात म्हणुन $\angle E = \angle T = 45^o$ आणि

"क्रमवार येणारे कोन संपुरक असतात " म्हणुन

$\angle L = 180^o - 45^o = 135^o$.

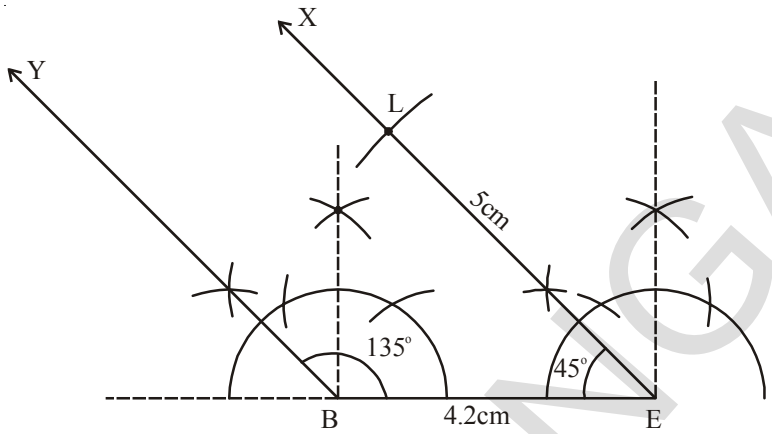
अशा प्रकारे $\angle B = \angle L = 135^o$

पायरी 2 : बा.को.बा. या गुणधर्माचा वापर करुन ΔBEL ची रचना करा ज्यात BE = 4.2 सें.मी., $\angle E = 45^o$ आणि EL = 5 सें.मी.



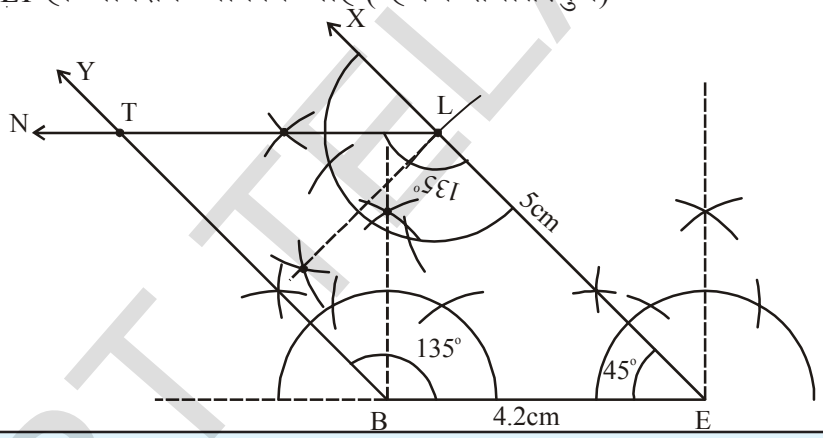
SCERT TELANGANA

पायरी 3 : $\angle B = 135^o$ काढा आणि $\overrightarrow{BY}$ काढा.



पायरी 4 :रचना करा $\angle L = 135^o$ आणि $\overrightarrow{LN}$ काढा जे $\overrightarrow{BY}$ ला T वर मिळते

BELT हा आवशक चौकोन आहे (म्हणजे समांतरभुज)



हे करा.
समांतरभुज चौकोनाच्या गुणधर्मावरुन वरील BELT समांतरभुज चौकोन ची रचना करा.?

अभ्यास - 3.4

खाली दिलेल्या मापावरुन चौकोनाची रचना करा.

(a) HELP चौकोनाची रचना कराHE= 6सें.मी., EL= 4.5 सें.मी., $\angle H=60^o$, $\angle E =105^o$ आणि $\angle P= 120^o$.

(b) समांतरभुज चौकोनGRAM ची रचना कराGR = AM= 5 सें.मी.,RA =MG=6.2सें.मी. आणि $\angle R = 85^o$

(c) आयत FLAG ज्याची एक बाजु FL = 6सें.मी. आणि LA = 4.2 सें.मी. आहे.

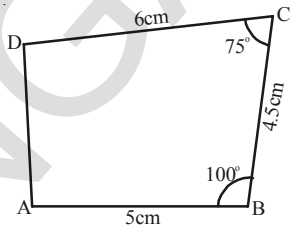
SCERT TELANGANA

3.2.5 जेव्हा तिन बाजुंची लांबी आणि दोन आतील कोन दिले असता चौकोनाची रचना करा. (बा.को.बा.को.बा.)

आपण बाजु कोन बाजुचा वापर करुन त्रिकोणाच्या रचनेवरुन आपण अशा प्रकारच्या चौकानाची रचना करु शकतो.

उदाहरण 8 : ABCD चौकोनाची रचना करा ज्यात AB = 5सें.मी, BC = 4.5 से.मी., CD = 6 सें.मी, $\angle B = 100^o$ आणि $\angle C = 75^o$.

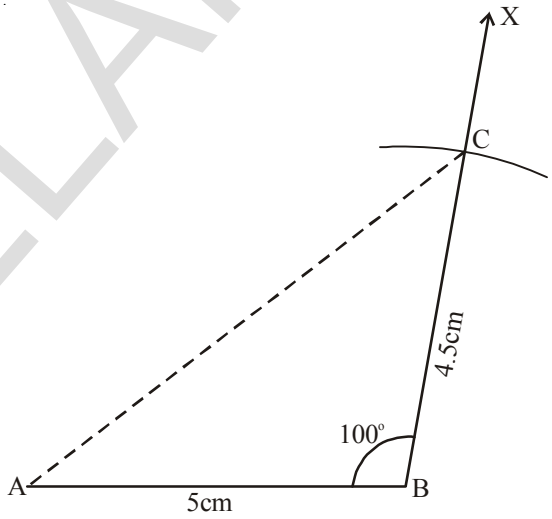
सोडवणुक :



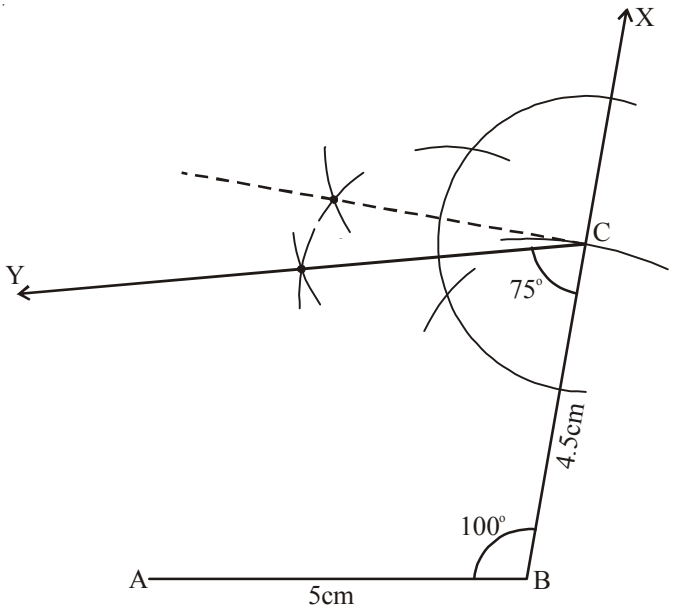
पायरी 1 : चौकोनाची कच्ची आकृती काढुन दिलेल्या मापांची खुण करा.

(ही माहिती चौकोनाच्या रचनेसाठी पुरेशी आहे किंवा नाही ते पहा.?

जर असेल तर समोर जा.)



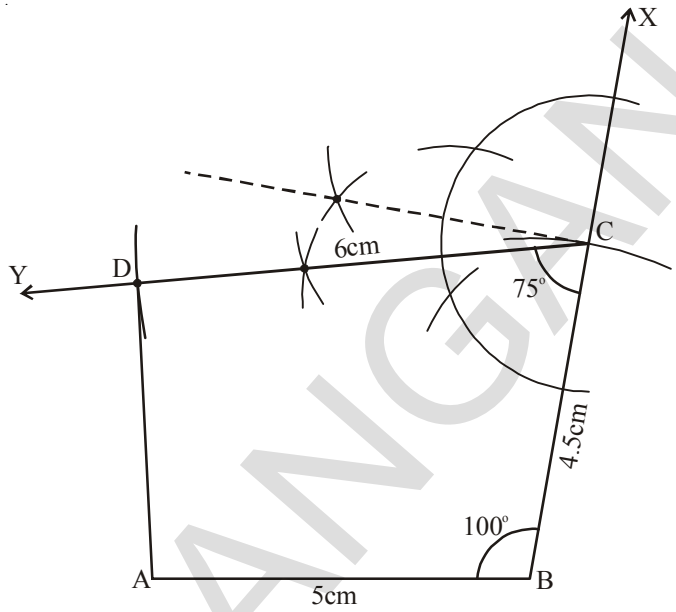
पायरी 2 : AB= 5सें.मी, $\angle B = 100^o$ आणि BC = 4.5 सें.मी.मापाचे बा.को.बा. गणुधर्मा नुसार ΔABC काढा.



पायरी 3 : $\angle C = 75^o$ ची रचना करुन $\overrightarrow{CY}$ काढा.

SCERT TELANGANA

पायरी 4 : केंद्रबिंदु 'C' वरुन 6 सें.मी. त्रिजेचा $\overline{CY}$ ला D. बिंदुवर छेदणारा चाप काढा. A आणि D जोडा ABCD हा अपेक्षीत चौकोन आहे.



विचार करा - चर्चा करा आणि लिहा. :

AB च्या ऐवजी BC ला पाया घेऊन तुम्ही वरील चौकोन ABCD ची रचना करु शकता का ? जर करु शकाल तर कच्चे चित्र रेखाटा आणि रचनेतील विविध पायऱ्याचे स्पष्टीकरण द्या.

अभ्यास - 3.5

खालील चौकोनाची रचना करा.

(a) चौकोन PQRS काढा ज्यात PQ = 3.6सें.मी., QR = 4.5 सें.मी., RS = 5.6 सें.मी., $\angle PQR = 135^o$ आणि $\angle QRS = 60^o$.

(b) चौकोन LAMP काढा ज्यात AM = MP = PL = 5सें.मी., $\angle M = 90^o$ आणि $\angle P = 60^o$.

(c) समलंब चौकोन ABCD काढा AB || CD, AB = 8 सें.मी. BC = 6सें.मी. CD= 4सें.मी. आणि $\angle B = 60^o$.

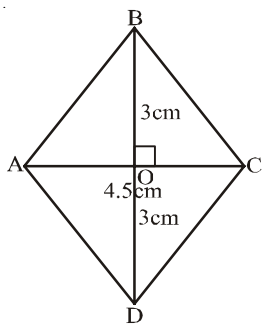
3.2.6 विशेष प्रकारच्या चौकोनाची रचना :

(a) समभुज चौकोनाची रचना :

उदाहरण 9 : ABCD समभुज चौकोन काढा ज्यामध्ये कर्ण AC = 4.5 सें.मी. आणि BD = 6 सें.मी..

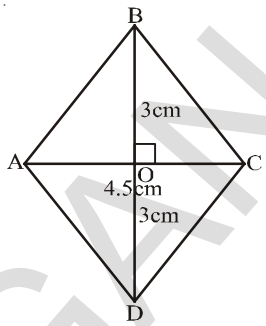
सोडवणुक :

पायरी 1 : ABCD समभुज चौकोनाचे कच्चे चित्र रेखाटा आणि दिलेल्या मापांची खुण करा. आवश्यक आकृतीसाठी दिलेली मापे पुरेशी आहेत का ? हे पाहण्यासाठी समभुज चौकोनाच्या एक किंवा दुसऱ्या गुणधर्माचा वापर त्यांची रचना करण्यासाठी करतो.



SCERT TELANGANA

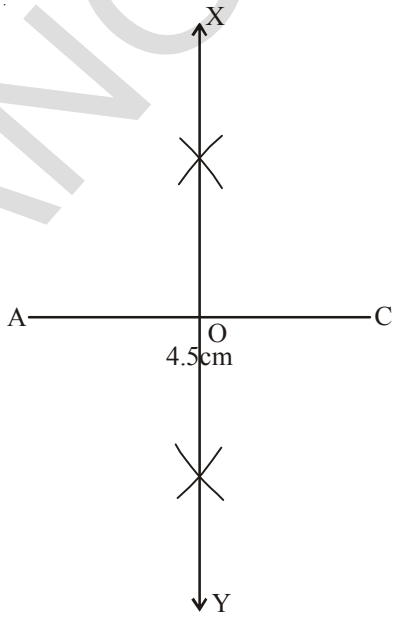
विश्लेषण: समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांस लांब दुभागतात. $\overline{AC}$ आणि $\overline{BD}$ हे ABCD. समभुज चौकोनाचे कर्ण आहेत जे 'O'वर दुभागतात. म्हणजे $\angle AOB = 90^o$ आणि



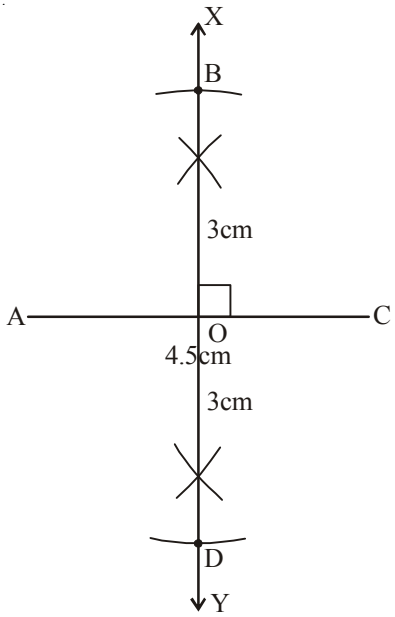
$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ सें.मी.}$$

आता, रचनेसाठी पायरी - 2 कडे चला

पायरी 2: $\overline{AC}$ = 4.5 सें.मी. काढा (ABCDसमभुज चौकोनाचा एक कर्ण) आणि त्याचे लांबदुभाजक $\overline{XY}$ काढा आणि छेदन बिंदुला 'O' अशी खुण करा.

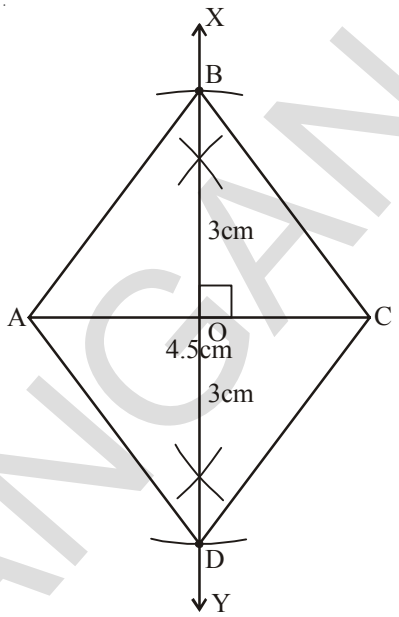


पायरी 3: दुसरा कर्ण $\overline{BD}$ हा $\overline{AC}$चा लंब आहे $\overline{BD}$ हा $\overline{XY}$चा एक भाग आहे. म्हणुन केंद्रबिंदु 'O' वरुन 3 सें.मी. त्रिजेचे (OB = OD = 3सें.मी.) $\overline{AC}$ च्या दोन्ही बाजुला $\overline{XY}$ला B आणि D बिंदुवर छेदणारे दोन चाप काढा.



SCERT TELANGANA

पायरी 4: (i) A, B (ii) B, C (iii) C, D आणि D(iv) D, A ला जोडा



विचार करा - चर्चा करा आणि लिहा :

1. AC च्या ऐवजी BD ला आधार करुन वरील चौकोना (समभुज) ची रचना करु शकता का ? जर नाही तर कारणे द्या.
2. समजा या समभुज चौकानाची लांबी समान असल्यास तुम्हाला कशी आकृती येते त्यासाठी कच्चे चित्र रेखाटा कारणे सांगा.

अभ्यास - 3.6

खाली दिलेल्या मापावरुन चौकानाची रचना करा.

(a) समभुज चौकोन CART काढा ज्यात CR = 6 सें.मी., AT = 4.8 सें.मी.

(b) समभुज चौकोन SOAP काढा ज्या मध्ये SA = 4.3 सें.मी., OP = 5 सें.मी.

(c) JUMP चौरसाची रचना करा ज्यामध्ये कर्ण 4.2 सें.मी. आहे.

SCERT TELANGANA

आपण काय चर्चा केली.?

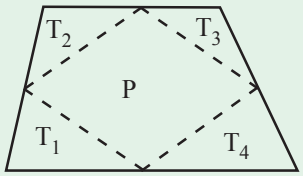
1. विशिष्ट चौकोनाच्या रचनेसाठी पाच स्वतंत्र मापनाची गरज आहे.
2. चौकोनाची रचना विशिष्टतेने करु शकने जर,
   (a) चार बाजुंची लांबी आणि एक कोन दिला असता.
   (b) चार बाजुंची लांबी आणि एक कर्ण दिला असता.
   (c) तीन बाजुंची लांबी आणि दोन कर्ण दिला असता.
   (d) दोन लगतच्या बाजुंची लांबी आणि तीन कोन दिले असता.
   (e) तीन बाजुंची लांबी आणि दोन लागुन असलेले कोन दिले असता.
3. जेव्हा दोन कर्ण दिल्या जाते तेव्हा दोन विशेष चौकोन, समभुज चौकोन आणि चौरस याची रचना करु शकतो.

शिक्षकांसाठी सुचना:

कंपासने काढलेले कोन अचुक असतात आणि त्याच तर्कानि सिध्द करु शकतात. परंतु कोनमापकांचा वापर , मोजण्यासाठी आणि पडताळा करण्यासाठी होतो. म्हणुन आपल्या सर्व विद्यार्थ्यांना कंपासच्या सहाय्याने सर्व शक्य कोनांची रचना करणे शिकु द्या.

कातरलेल्या कागदाची गंमत

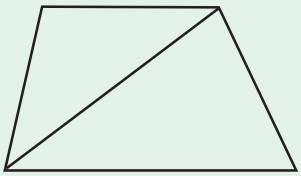
एका कागदावरुन आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एक चौकोन कातरा बाजुच्या मध्यबिंदुना ओळखुन क्रमवार रितेने जोडुन चार त्रिकोण T_1, T_2, T_3, T_4 आणि संमातर भुज चौकोन P तयार होतो.
या चार त्रिकोनाच्या सहाय्याने समातंरभुज चौकोनास तयार करु शकता का? समातंर भुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ मुळ चौकोनाच्या क्षेत्रफळाशी तुलना कशी कराल?

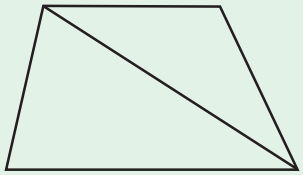


छोटीशी गंमत

चौकोन + चौकोन = समातंर भुज चौकोन?

एका कागदाची अर्धी घडी करुन कातरीने त्यास दोन एकरुन चर्तुभुजाच्या आकारात कापा. पहिल्या चर्तुभुजात एका कर्णावरुन कापा. दुसऱ्या चर्तुभुजात कर्णावरुन कापा. या चारही त्रिकोनावरुन समांतर भुज चौकोन तयार करु शकतो का हे दाखवा?





SCERT TELANGANA

धडा 4

घातांक आणि घात

4.0 प्रस्तावना

आपणास माहित आहे $3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ आणि

$3^m = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times$ ..... (m वेळ)

तुम्हाला माहित आहे का ?
सुर्याचे अंदाजे व्यास 1,40,00,00,000 m आणि
सुर्याचे वजन 1, 989, 100, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 कि.ग्रा. आहे.
सुर्यापासुन पृथ्वीचे अंतर 149, 600, 000, 000 m. आहे. विश्व सुमारे 12,000,000,000 वर्ष जुने आहे. पृथ्वी समुद्राच्या पाण्याचा सुमारे 1,353,000,000 घन कि.मी. आहे.

चेस बोर्डचा प्रत्येक चौरस धान्याने भरलेला आहे. पहिला डबा एकाधान्याने भरला आहे. आणि इतर डब्बे अशा प्रकारे भरले आहे की डब्यातील धान्याची एकुण संख्या अगोदरच्या डब्याच्या दुप्पट आहे. 64 डबे भरण्यासाठी किती धान्य आवश्यक आहे, हे तुम्हास माहित आहे काय. ? ते 18,446,744,073,709,551,615 आहे.

अशी मोठी संख्या वाचण्यासाठी लिहिण्यासाठी आणि समजण्यासाठी अवघड नाही का. आता आपण अशा प्रकारची संख्या घातांकाच्या रुपात लिहिण्याचा प्रयत्न करु.

$1,40,00,00,000 \text{ m} = 1.4 \times 10^9 \text{ m}.$

आपण 10^9 यास 10 चा घातांक 9 असे वाचतो.

घातांक

पाया ← 10^9

हे करा

1. खालील संक्षिप्त करा.

   (i) $3^7 \times 3^3$ (ii) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ (iii) $3^4 \times 4^3$

2. हैदराबाद ते दिल्ली मधील रेल्वेचे अंतर 1674.9 कि.मी. आहे. यास तुम्ही सेंटी मीटर मध्ये कसे व्यक्त करता. यास शास्त्रिय रुपात सुध्दा लिहा. ?

SCERT TELANGANA

4.1 ऋण घातांका सोबत घात

नेहमी

सुर्याचा व्यास = 1400000000m $= 1.4 \times 10^9$ m असे लिहितो.

अवागाड्रोंची संख्या $= 6.023 \times 10^{23}$

या सर्व मोठ्या संख्या आहेत. आणि संक्षिप्त रुपात सुलभतेने लिहु शकता.

पण एकका पेक्षा लहान संख्या घातांकाच्या रुपात कसे लिहितात. उदा.

केसांची जाडी = 0.000005 m

मायक्रोफि ल्मची जाडी = 0.000015 m

एककापेक्षा लहान संख्या कशा दर्शवितात ते माहित करु या.

मागील वर्गातील खालील नमुन्याची उजळणी करु या.

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$10^2 = 10 \times 10 = 100 = 1000/10$

$10^1 = 10 = 100/10$

$10^0 = 1 = 10/10$

$10^{-1} = ?$

घातांक जसा जसा 1 ने कमी होत जाते तशी किंमत अगोदरच्या किंमतीच्या एक दशांश होते.

वरील नमुन्या वरुन असे म्हणु शकतो की, $10^{-1} = \frac{1}{10}$

अशा रितीने $10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

वरील स्पष्टीकरणावरुन आपण त्यास असे लिहु शकतो की, $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ *or* $\frac{1}{10^{-n}} = 10^n$

खालील तक्त्याचे निरिक्षण करा.

1 किलोमिटर	1 हेक्टो मिटर	1 डेकामिटर	1 मीटर	1 डेसीमिटर	1 सेंटीमिटर	1 मिली मिटर
1000m	100m	10m	1 m	$\frac{1}{10}$ m	$\frac{1}{100}$ m	$\frac{1}{1000}$ m
10^3 m	10^2 m	10^1m	10^0m	10^{-1}m	10^{-2}m	10^{-3}m

SCERT TELANGANA

हे करा

10^{-10} हे कशाच्या बरोबर आहे.?

नमुन्याचे निरिक्षण करा.

(i) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(ii) $\frac{8}{2} = 4 = 2 \times 2 = 2^2$

(iii) $\frac{4}{2} = 2 = 2^1$

(iv) $\frac{2}{2} = 1 = 2^0$

(v) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

(vi) $\frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

सामान्यता म्हणु शकतो की, कोणत्याही शुन्य नसणाऱ्या पुर्णांक संख्या 'a' साठी $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ हा a^m च्या गुणाकाराचा व्यस्त आहे.

म्हणजे $a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$

हे करा

खालील गुणाकाराचा व्यस्त माहित करा.

(i) 3^{-5} (ii) 4^{-3} (iii) 7^{-4} (iv) 7^{-3}

(v) x^{-n} (vi) $\frac{1}{4^3}$ (vii) $\frac{1}{10^3}$

आपणास माहित आहे की, $\frac{\text{अंतर}}{\text{वेळ}}$ वेग = यास

संज्ञेच्या रुपास लिहिल्यास , $s = \frac{d}{t}$. जेव्हा अंतरास (m) मिटर मध्ये दर्शवितो आणि वेळेला सेकंद (s)मध्ये दर्शविते वेगाचे एकक असे लिहितात. $m \times s^{-1}$ अशा रितीने त्वरणाचे एकक $\frac{m}{s^2}$. याला $m \times s^{-2}$ असे सुध्दा व्यक्त करतात.

SCERT TELANGANA

आपण 3456 अशा संख्यांना विस्ताराच्या रुपात / संख्येच्या रुपात खालील प्रमाणे लिहु शकतो.

$$3456 = (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1)$$

$$3456 = (3 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (5 \times 10) + (6 \times 10^0)$$

अशा प्रकारे $7405 = (7 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (0 \times 10) + (5 \times 10^0)$

आपण 326.57 अशा दशांश संख्यांना घातांकाच्या साहाय्याने विस्ताराच्या रुपात कसे व्यक्त करतो ते आता पाहुया.

(आपणास माहित आहे $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ & $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$)

$$326.57 = (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + \left(\frac{5}{10}\right) + \left(\frac{7}{10^2}\right)$$

$$= (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + (5 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2})$$

अशा प्रकारे $734.684 = (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + \left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{8}{10^2}\right) + \left(\frac{4}{10^3}\right)$

$$= (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + (6 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-2}) + (4 \times 10^{-3})$$

हे करा

घातांकाचा वापर करुन खालील संख्याचा विस्तार करा.

(i) 543.67 (ii) 7054.243 (iii) 6540.305 (iv) 6523.450

4.2 घातांकाचे नियम

आपण शिकलोत की कोणत्याही शुन्येतर पुर्णांक 'a' साठी $a^m \times a^n = a^{m+n}$; येथे 'm' आणि 'n' नैसर्गिक संख्या आहेत.

हा नियम ऋनात्मक घातांकासाठी चांगला आहे का ?

चला पडताळा करु या.

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ कोणत्याही शुन्येतर पुर्णांक 'a' साठी

(i) समजा $3^2 \times 3^{-4}$

आपणास माहित आहे $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$

(आपणास माहित आहे $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$)

म्हणुन $3^2 \times 3^{-4} = 3^2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{3^2}{3^4}$

$= 3^{2-4} = 3^{-2}$

i.e., $3^2 \times 3^{-4} = 3^{-2}$

(ii) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ घ्या. $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^3} \times \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)^{3+4}}$

SCERT TELANGANA

$$= \frac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7} \quad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$$

म्हणुन $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = (-2)^{-7}$

(iii) $(-5)^2 \times (-5)^{-5}$ घेऊ या

$$(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^2 \times \frac{1}{(-5)^5}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{5-2}} = \frac{1}{(-5)^3} \qquad \left(\text{But } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}\right)$$

$$= (-5)^{-3}$$

म्हणुन $(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^{-3}$ (आपणास माहित आहे $2+(-5) = -3$)

सामान्यता कोणत्याही शुन्येतर पुर्णांक 'a'साठी $a^m \times a^n = a^{m+n}$ येथे 'm' आणि a 'n' आणि पुर्णांक संख्या आहेत.

हे करा.

संक्षिप्त करुन खालील एकेरी घातांकाच्या रुपात लिहा.

(i) $2^{-3} \times 2^{-2}$ (ii) $7^{-2} \times 7^5$ (iii) $3^4 \times 3^{-5}$ (iv) $7^5 \times 7^{-4} \times 7^{-6}$

(v) $m^5 \times m^{-10}$ (vi) $(-5)^{-3} \times (-5)^{-4}$

अशारीतीने आपण खालील घातांकाच्या नियमाचा पडताळा करु शकतो येथे 'a'आणि'b' हे शुन्य नसणाऱ्या पुर्णांक संख्या आहेत आणि 'm'आणि'n' कोणतेही पुर्णांक आहेत.

1. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a^m \times b^m) = (ab)^m$

तुम्ही खालच्या वर्गात फक्त धनात्मक घातांकाच्या नियमा बददल शिकलात

SCERT TELANGANA

4. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

5. $a^0 = 1$

जर $a^m = a^n$ असल्यास 'm' आणि 'n' यामध्ये काय संबंध आहे. हे तुम्ही माहित करु शकता काय येथे 'a' ही शुन्येतर पुर्णांक संख्या आहे आणि $a \neq 1, a \neq -1$. चला पाहु या.

> $a \neq 1$ का नाही ?
> जर $a = 1, m = 7$ आणि $n = 6$ तर
> $1^7 = 1^6$
> $\Rightarrow 7 = 6$
> हे सत्य आहे का ?
> म्हणुन $a \neq 1$
> जर $a = -1$ तर काय घडते.

समजा $a^m = a^n$ तर $\frac{a^m}{a^n} = 1$ (दोन्ही बाजुस a^n भागल्यास)

म्हणजे $a^{m-n} = 1$. $a^{m-n} = a^0$

$\therefore m - n = 0$

$\therefore m = n$

अशा प्रकारे आपण निश्कर्ष काढु शकतो की जर $a^m = a^n$ तर $m = n$.

उदाहरण 1: किंमत काढा (i) 5^{-2} (ii) $\frac{1}{2^{-5}}$ (iii) $(-5)^2$

सोडवणुक : (i) $5^{-2} = \frac{1}{(5)^2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$ (आपणास माहित आहे $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$)

(ii) $\frac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (आपणास माहित आहे $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$)

$2^5 = 32$

(iii) $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

उदाहरण 2 : खालील सरळ रुप द्या.

(i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (ii) $\frac{4^7}{4^4}$ (iii) $\left(\frac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

सोडवणुक: (i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (आपणास माहित आहे $a^m \times a^n = a^{m+n}$)

$= (-5)^{4+(-6)} = (-5)^{-2}$

$= \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{(-5) \times (-5)} = \frac{1}{25}$ (आपणास माहित आहे $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$)

(ii) $\frac{4^7}{4^4}$ (आपणास माहित आहे $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$)

$= 4^{7-4} = 4^3 = 64$

SCERT TELANGANA

(iii) $\left(\frac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

$= (3^{5-3})^5 \times 3^{-6}$ (आपणास माहित आहे $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$)

$= (3^2)^5 \times 3^{-6}$ $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 3^{10} \times 3^{-6} = 3^4 = 81$

उदाहरण 3: खालील प्रत्येकास धन घातांकाच्या रुपात व्यक्त करा.

(i) 4^{-7} (ii) $\frac{1}{(5)^{-4}}$ (iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ (iv) $\frac{7^{-4}}{7^{-6}}$

सोडवणुक : (i) 4^{-7} (आपणास माहित आहे $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$)

$= \frac{1}{(4)^7}$

(ii) $\frac{1}{(5)^{-4}}$ (आपणास माहित आहे $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$)

$= 5^4$

(iii) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{4^{-3}}{7^{-3}}$ $\left(a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ and } a^m = \frac{1}{a^{-m}}\right)$

$= \frac{7^3}{4^3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3$

सामान्यता $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

(iv) $\frac{7^{-4}}{7^{-6}}$

$= 7^{-4-(-6)}$

$= 7^{-4+6} = 7^2$

उदाहरण 4 : 27^{-4} ला पाया 3 च्या घातांकाच्या रुपात व्यक्त करा.

सोडवणुक : 27 ला $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ असे लिहिता येते.

म्हणुन $27^{-4} = (3^3)^{-4}$

$= 3^{-12}$ आपणास माहित आहे $(a^m)^n = a^{mn}$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 5 : संक्षिप्त रुप द्या.

(i) $\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3}$ (ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

सोडवणुक : (i) $\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3}$

27 ला $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ असे लिहीता येते

$\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3} = \frac{1}{3^3}\times 2^{-3}$

$= \frac{1}{3^3}\times\frac{1}{2^3}$ आपणास माहित आहे $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$= \frac{1}{(3\times 2)^3}$ आपणास माहित आहे $a^m \times b^m = (ab)^m$

$= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

(ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

$= 4^4 \times (4^2)^{-2} \times 4^0$ आपणास माहित आहे $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 4^4 \times 4^{-4} \times 4^0$ आपणास माहित आहे $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$= 4^{4-4+0} = 4^0$ परंतु $a^0 = 1$

$=1$

उदाहरण 6: तुम्ही 'x'च्या किंमतीचा अंदाज लावु शकता का ? जेव्हा

$2^x = 1$

सोडवणुक: अगोदर केलेल्या चर्चे प्रमाणे $a^0 = 1$

स्पष्ट पणे $2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$\Rightarrow x = 0$

उदाहरण 7 : 'x'ची किंमत काढा.

(i) $25 \times 5^x = 5^8$ (ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$ (iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

SCERT TELANGANA

सोडवणुक :(i) $25 \times 5^x = 5^8$ आपणास माहित आहे $25 = 5 \times 5 = 5^2$

$5^2 \times 5^x = 5^8$ परंतु $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$5^{2+x} = 5^8$ जर $a^m = a^n \Rightarrow m = n$

$2 + x = 8$

$\therefore x = 6$

(ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

$\frac{1}{7^2} \times 7^{2x} = 7^8$ आपणास माहित आहे $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$7^{-2} \times 7^{2x} = 7^8$

$7^{2x-2} = 7^8$

$2x - 2 = 8$ ($\therefore$ पाया समान आहे)

$2x = 8 + 2$

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore x = 5$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$ [$\therefore (a^m)^n = a^{mn}$]

$3^{24} = 3^{12x}$ (पाया समान आहे)

$24 = 12x$

$x = \frac{24}{12} = 2$

(iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+1+7} = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+8} = (-2)^{12}$ ($\therefore$ पाया समान आहे)

$x + 8 = 12$

$x = 12 - 8 = 4$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 8 : सरळ रुप द्या. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$

$$\frac{25}{4} = \frac{5\times5}{2\times2} = \frac{5^2}{2^2}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-2}$$

परंतु $(a^m)^n = a^{mn}$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{2^4}{5^4} = 5^{3-4} \times 2^{4-3}$$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

$$= 5^{-1} \times 2^1 = \frac{2}{5}$$

उदाहरण 9 : सरळ रुप द्या. $\left[\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right\}\right]$

सोडवणुक: $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$ आपणास माहित आहे $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$= \left[\left(\frac{1^{-3}}{3^{-3}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right) \div \frac{1^{-2}}{5^{-2}}\right]$ आपणास माहित आहे $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ आहे $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$

$$= \left[\left(\frac{3^3}{1^3} - \frac{2^3}{1^3}\right) \div \frac{5^2}{1^2}\right] = \left(\frac{27}{1} - \frac{8}{1}\right) \div 25$$

$$= (27 - 8) \div 25 = \frac{19}{25}$$

उदाहरण 10 : जर $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ तर x^{-2}ची किंमत काढा

सोडवणुक: $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ आपणास माहित आहे $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}}$$

SCERT TELANGANA

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{2+4}}{2^{2+4}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12} = \frac{3^{-12}}{2^{-12}} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

अभ्यास - 4.1

1. सरळ रुप द्या आणि कारणे लिहा.

(i) 4^{-3} (ii) $(-2)^7$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ (iv) $(-3)^{-4}$

2. सरळ रुप द्या आणि खालील एकेरी घातांकात दर्शवा

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$ (ii) $(-2)^7 \times (-2)^3 \times (-2)^4$

(iii) $4^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{5^{-4}}{5^{-6}}\right) \times 5^3$ (v) $(-3)^4 \times 7^4$

3. सरळ रुप द्या. (i) $2^2 \times \frac{3^2}{2^{-2}} \times 3^{-1}$ (ii) $(4^{-1} \times 3^{-1}) \div 6^{-1}$

4. सरळ रुप द्या. आणि कारणे सांगा.

(i) $(4^0 + 5^{-1}) \times 5^2 \times \frac{1}{3}$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

(iii) $(2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}) \times \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{3^{-2}}{3} \times (3^0 - 3^{-1})$

(v) $1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^0$ (vi) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2$

SCERT TELANGANA

5. सरळ रुप द्या आणि कारणे सांगा. (i) $\left[(3^2-2^2)\div\frac{1}{5}\right]^2$ (ii) $((5^2)^3\times 5^4)\div 5^6$

6. खालील प्रत्येकातील 'n'ची किंमत काढा.

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

(ii) $(-3)^{n+1}\times(-3)^5=(-3)^{-4}$

(iii) $7^{2n+1}\div 49=7^3$

7. जर $2^{-3}=\frac{1}{2^x}$ तर 'x'माहित करा

8. सरळ रुप द्या $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\div\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right]\times\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

9. जर $m=3$ आणि $n=2$ तर खालील किंमती काढा.

(i) $9m^2-10n^3$ (ii) $2m^2n^2$ (iii) $2m^3+3n^2-5m^2n$ (iv) m^n-n^m

10. सरळ रुप आणि कारणे द्या. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-5}\times\left(\frac{7}{4}\right)^{-7}$

4.3 संख्याना प्रमाणिक रुपात दर्शविण्यासाठी घातांकाचे उपयोजन

खालच्या वर्गात आपण मोठ्या संख्याना त्याच्या सामान्य रुपात कसे व्यक्त करतो हे शिकलो.

उदाहरण- 300,000,000 मी. $=3\times10^8$ मी.

आता, खुप लहान संख्येला सामान्य रुपात व्यक्त करणे.

समजा, संगणका मधील चिपच्या तारेचा व्यास 0.000003 मी. आहे.

$$0.000003 \text{ मी.} = \frac{3}{1000000}$$

$$=\frac{3}{10^6}$$

$$=3\times10^{-6} \text{ मी.}$$

म्हणुन $0.000003=3\times10^{-6}$ मी.

SCERT TELANGANA

अशा रितीने रोपट्याच्या पेशीचा आकार समजा 0.00001275m आहे.

$$0.00001275\text{m} = \frac{1275}{100000000}$$

$$= 1.275 \times \frac{10^3}{10^8}$$

$$= 1.275 \times 10^{-5}\ \text{m}$$

हे करा

1. संख्याना त्यांच्या सामान्य रुपात बदलुन विधान पुन्हा लिहा.
   (i) पृथ्वीपासुन सुर्याचे अंतर 149,600,000,000 मी. आहे.
   (ii) सुर्याची सरासरी त्रिज्या 695000 कि.मी. आहे.
   (iii) मानवी केसाची जाडी 0.08 मी.मी. ते 0.12 मी.मी. या श्रेणीत असते.
   (iv) माऊंट एवरेस्ट ची उंची 8848 मी. आहे.
2. खालील संख्याला सामान्य रुपात लिहा.
   (i) 0.0000456 (ii) 0.000000529 (iii) 0.0000000085
   (iv) 6020000000 (v) 35400000000 (vi) 0.000437×10^4

4.4 अतिशय मोठ्या आणि अतिशय लहान संख्याची तुलना

आपणास कळते की सुर्याचा व्यास 14000000000 m. आणि पृथ्वीचा व्यास 12750000 m. आहे . आपल्याला सुर्यांचा व्यास पृथ्वीच्या व्यासापेक्षा किती मोठी आहे. हे माहित करण्यासाठी सुर्याच्या व्यासाला पृथ्वीच्या व्यासाने भाग द्यावा लागेल.

म्हणजे $\frac{14000000000}{12750000}$

तुम्हाला हे कठिण वाटते नाही का, जर आपण त्यास सामान्य रुपात लिहिल्यास आपण सहजपणे सुर्य किती मोठा आहे. हे माहित करु शकतो. चला पाहु या.

सुर्यांचा व्यास = 14000000000 m $= 1.4 \times 10^9$ m

पुथ्वीचा व्यास = 12750000 = 1.275×10^7 m

म्हणुन आपल्याला $\frac{\text{सुर्याचा व्यास}}{\text{पृथ्वीचा व्यास}} = \frac{1.4 \times 10^2 \times 10^7}{1.275 \times 10^7}$

$$= \frac{1.4 \times 10^2}{1.275}$$

$$\simeq 10^2 = 100 \quad \text{(जवळ जवळ)}$$

SCERT TELANGANA

अशा प्रकारे सुर्याचा व्यास पृथ्वीच्या व्यासापेक्षा 100 पट आहे. म्हणजे सुर्य पृथ्वीपेक्षा 100 पट मोठा आहे.

अजुन एक स्पष्टीकरण घेऊ या.

पृथ्वीचे वजन 5.97×10^{24} कि.ग्रा. आणि चंद्राचे वजन 7.35×10^{22} कि.ग्रा. आहे.

त्यांचे एकुण वजन किती ?

पृथ्वीचे वजन $= 5.97 \times 10^{24}$ kg

चंद्राचे वजन $= 7.35 \times 10^{22}$ kg

एकुण वजन $= 5.97 \times 10^{24}$ Kg $+ 7.35 \times 10^{22}$ kg

$= (5.97 \times 10^{2} \times 10^{22}$ Kg$) + 7.35 \times 10^{22}$ kg

$= (5.97 \times 10^{2} + 7.35) \times 10^{22}$ kg

$= (597 + 7.35) \times 10^{22}$ kg

$= 604.35 \times 10^{22}$ kg

$= 6.0435 \times 10^{24}$ kg

> जेव्हा आपणास सामान्य रुपात संख्या मिळवयाची असल्यास त्यास सारखे घातांकाच्या संख्येत बदलावे.

उदाहरण 11 : खालील सामान्य रुपात व्यक्त करा.

(i) 4.67×10^{4} (ii) 1.0001×10^{9} (iii) 3.02×10^{-6}

सोडवणुक:

(i) $4.67 \times 10^{4} = 4.67 \times 10000 = 46700$

(ii) $1.0001 \times 10^{9} = 1.0001 \times 1000000000 = 1000100000$

(iii) $3.02 \times 10^{-6} = 3.02/10^{6} = 3.02/1000000 = 0.00000302$

अभ्यास - 4.2

1. खालील संख्यांना मानक रुपात (Standanrd) मध्ये लिहा ?

   (i) 0.000000000947 (ii) 543000000000

   (iii) 48300000 (iv) 0.00009298 (v) 0.0000529

2. खालील संख्यांना सामान्य रुपात लिहा.

   (i) 4.37×10^{5} (ii) 5.8×10^{7} (iii) 32.5×10^{-4} (iv) 3.71529×10^{7}

   (v) 3789×10^{-5} (vi) 24.36×10^{-3}

3. खालील माहितीस मानक रुपात लिहा ?

   i) बॅक्टेरीयाचा आकार 0.0000004m आहे.

   ii) लाल रक्त पेशीचा आकार 0.000007mm आहे.

SCERT TELANGANA

(iii) प्रकाशाचा वेग 300000000 मी /सेकंद आहे.

(iv) चंद्र आणि पृथ्वीमधील अंतर 384467000 m(app) सुमारे आहे.

(v) इलेक्ट्रानचा प्रभार 0.0000000000000000016 कोलंब आहे.

(vi) कागदाच्या तुकड्याची जाडी 0.0016 सें.मी. आहे.

(vii) संगणक चिपच्या तारेचा व्यास 0.000005 सें.मी. आहे.

4. एका ढिगात प्रत्येकी 20 एमएम जाडीची 5 पुस्तके आणि 0.016mm जाडीची कागदाची 5 शिट आहे. तर त्या ढिगाची जाडी किती आहे.

5. राकेश ने घातांकाची काही उदाहरणे खालील रितीने सोडविली. या उत्तराशी तुम्ही सहमत आहात का?जर नाही तर का नाही ? तुमच्या म्हनणे बरोबर आहे हे सिध्द करा.

(i) $x^{-3} \times x^{-2} = x^{-6}$ (ii) $\frac{x^3}{x^2} = x^4$ (iii) $(x^2)^3 = x^{2^3} = x^8$

(iv) $x^{-2} = \sqrt{x}$ (v) $3x^{-1} = \frac{1}{3x}$

प्रकल्प :

तुमच्या शाळेतील पुस्तकांचा संदर्भ घेऊन आणि कोणतेही 5 शास्त्रिय पणे घडलेल्या गोष्टी गोळा करा ज्यात लहान संख्याचा समावेश आहे. त्यास ऋणात्मक घातांकाचा वापर करुन लिहा.

आपण काय चर्चा केली.

1. ऋणात्मक घातांकाच्या संख्या खालील घातांकाच्या नियमाचे पालन करते.

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(c) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (d) $a^0 = 1$ (e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. अतिशय लहान संख्यांना ऋणात्मक घातांकाच्या साहाय्याने प्रामाणिक रुपात लिहिता येते.

3. अतियश लहान आणि मोठ्या संख्यांची तुलना करता येते.

4. सामान्य चुका ओळखणे.

SCERT TELANGANA

थडा 5

गुणोत्तराचा वापर करुन राशींची तुलना करा

5.1 प्रस्तावना

आपल्या दैननदिंन जिवनात आपणास काही वेळा राशिंची तुलना करण्याची गरज पडते. आपण शिकलो की गुणोत्तर आणि टक्केवारी यांना राशिंची तुलना करण्यासाठी वापरतात. चला खालील उदाहरण पाहु या.

एका 40 विद्यार्थ्यांच्या वर्ग पुढारीसाठी मतदान ठेवण्यात आले स्नीग्धाने 24 मते घेऊन पहिली आली आणि सिरीने 16 मते घेऊन दुसरी आली. म्हणुन स्नीग्धा आणि सिरीने घेतलेले मत यांचे गुणोत्तर 24:16 आहे. संक्षिप्त केल्यास गुणोत्तर काय येईल ? 3:2 येईल.

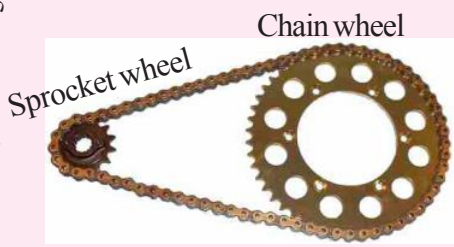
सिरीने आणि स्नीग्धा ने मिळविलेल्या मतांचे गुणोत्तर 2:3 होईल तर तुम्ही काय गुणोत्तर होते सांगु शकता काय ?

क्रमवार दोन राशींची तुलना म्हणजे गुणोत्तर आहे.

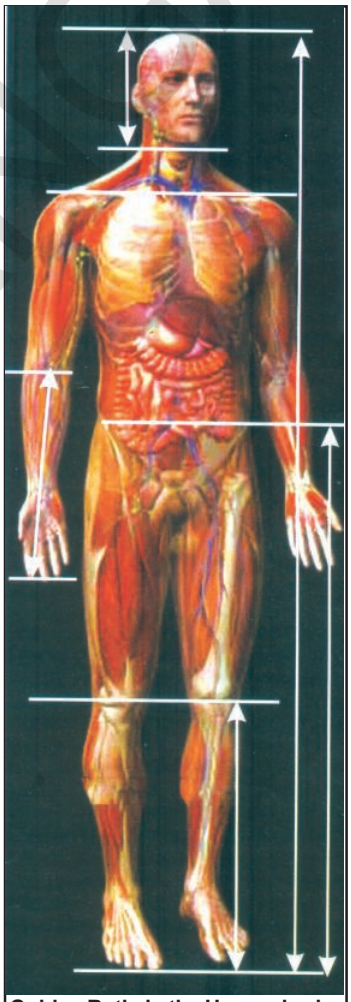
प्रयत्न करा.

1. तुमच्या सायकीलचा दाने असलेल्या चाकाचे गुणोत्तर माहित करा. तुमच्या सायकिलच्या पेंडील चक्राचे दाते मोजा आणि मागच्या चकाचे दाते मोजा.

   सायकलीच्या चक्रावरच्या दातांची संख्या : सायकलीच्या मागच्या चक्राच्या दातांची संख्या याला दाने असलेल्या चक्राचे गुणोत्तर म्हणतात. सांगा की, किती वेळा मागचे दातां चे चक्र फि रते जेव्हा सायकलीचे चक्र एक वेळा फि रते.



2. कोणत्याही पाच वेगवेगळ्या परिस्थितीचे टक्केवारी संबंधीत समाचार पत्रातुन माहित प्राप्त करा.



Golden Ratio in the Human body
Human beings are no exception to the golden ratio. In fact, our body architecture is one of the most perfect examples of this 'Divine proportion'.
Consider the following:
- Height : length between naval point and foot
- Length between shoulder line: length of the head.
- Length between finger tip to elbow: length between wrist and elbow
- Length between naval point to knee:length between knee and foot

SCERT TELANGANA

गुणोत्तरः

काही वेळा आपणास दोन गुणोत्तर एकच सारखे दर्शवावे लागते. हे समजण्यासाठी खालील उदाहरणाला समजुन घ्यावे लागेल.

रामय्याने आणि गोपालम यांनी एक धंदा 2000 रुपये आणि 3000 रुपये गुंतवुन सुरु केला. वर्षाच्या शेवटी ते आलेला नफा कोणत्या गुणोत्तरात वाटुन घेतील.?

गुतंवणुकीचे गुणोत्तर = 2000: 3000

= 2: 3

वर्षभराची गुंतवणुक खाली दिली आहे.

महिना	जाने	फे ब्रु	मार्च	एप्रिल	मे	जुन	जुलै	ऑग	सेप्टं	ऑक्टो	नोव्हें	डिसें	एकुण वाटा
रामय्याचा वाटा	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	24
गोपालम चा वाटा	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	36

त्यांच्या वाट्याचे गुणोत्तर = 24: 36

= 2: 3 आणि, वेळेचे गुणोत्तर = 1:1

तुम्हाला काय दिसते? गुंतवणुक चे गुणोत्तर वाट्याच्या गुणोत्तराच्य समान आहे जेव्हा वेळ समान असते. म्हणुन ते त्यांचा नफा वाट्याच्या गुणोत्तरात वाटुन घेतात. म्हणुन वर्षाचा नफा ते 2:3 गुणोत्तरात वाटुन घेतात.

वरील उदाहरणात

संदर्भ 1 : समजा त्या दोघांनीही एक धंदा समान भांडवलीने 5000 रुपये ने सुरु केला परंतु रामय्याने तो धंदा 12 महिण्याच्या काळ केला आणि गोपालमने 9 महिण्यापर्यंत केला. तर ते समान नफा कसे वाटुन घेतील? तुम्ही म्हणु शकता का त्यांनी समान भांडवलीने धंदा सुरु केला होता तर त्यांना वर्षाच्या शेवटी नफा समान गुणोत्तरात वाटुन घेतला पाहिजे?

SCERT TELANGANA

भांडवलीचे गुणोत्तर = 5000: 5000 = 1:1

महिना	जाने	फे ब्रु	मार्च	एप्रिल	मे	जुन	जुलै	ऑग	सेप्ट	ऑक्टो	नोव्हें	डिसें	एकुण वाटा
रामय्याचा वाटा	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	12
गोपालम चा वाटा	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹				9

वाट्याचे गुणोत्तर = 12: 9 = 4:3 आणि वेळेचे गुणोत्तर = 12: 9 = 4: 3 त्यांची गुंतवणुक समान आहे. म्हणुन ते त्याचा नफा त्याच्या वाट्याच्या गुणोत्तरात वाटुन घेतात. ते म्हणजे त्यांच्या वेळेचे गुणोत्तर.

संदर्भ 2 :पुन्हा समजा कि रामय्याने 2000 रुपये 12 महिण्यासाठी गुंतविले आणि गोपालमने 3000 रुपये 1 महिण्यासाठी गुंतविले. ते कोणत्या गुणोत्तरात वर्षाचा नफा वाटुन घेऊ शकतात.? हे गुंतवनुकीच्या गुणोत्तराच्या किंवा वेळेचे गुणोत्तर आहे का ? रामय्याने कमी रक्कम परंतु अधिक काळापर्यंत जमा केली आहे. गोपालम ने जास्त रक्कम परंतु कमी वेळेसाठी. येथे आपणास त्याच्या भांडवलीचा तसेच वेळेला महत्व दिले पाहिजे. ते कसे केले पाहिजे?

भांडवलीचे गुणोत्तर = 2000: 3000 = 2:3

वेळेचे गुणोत्तर = 12: 9 = 4:3

महिना	जाने	फे बु	मार्च	एप्रिल	मे	जुन	जुलै	ऑग	सेप्टं	ऑक्टो	नोव्हें	डिसें	एकुण वाटा
रामय्याचा वाटा	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	24
गोपालम वाटा	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹				27

वाट्याचे गुणोत्तर = 24 : 27 = 8 : 9

= (2 × 12) : (3 × 9) = 8 : 9 (वरील तक्ता पहा.)

येथे भांडवलीचे गुणोत्तर 2:3 आणि वेळेचे गुणोत्तर 4:3 वाट्याचे गुणोत्तर (2 × 12): (3 × 9) = 8 : 9. गुणोत्तर दुभागला तुम्हाला काही आढळते का भांडवल आणि वेळ मधील संबंध आहे का ?

SCERT TELANGANA

वाट्याचे गुणोत्तर असे देखील लिहले जावु शकते 8 : 9 = 2 : 3 :: 4 : 3 हे 2 : 3 आणि 4 : 3.

चे गुणोत्तर गुणोत्तराचा

गुणाकाराला

दोन साधारण गुणोत्तराला एकाच गुणोत्तरात दर्शविले जाते. संयुक्त गुणोत्तर म्हणतात. संख्यांना गुणीले असता संयुक्त गुणोत्तर येते आणि त्याला अपुर्णांकने दर्शवितात.

a : b आणि c : d हे कोणतेही गुणोत्तरआहेत. तर त्याचे संयुक्त गुणोत्तर $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ म्हणजेच ac: bd.

प्रयत्न करा.

1. खालील चे संयुक्त गुणोत्तर काढा.

   (a) 3 : 4 आणि 2 : 3 (b) 4 : 5 आणि 4 : 5 (c) 5 : 7 आणि 2 : 9

2. तुमच्या दैनदिन जिवनातील काही उदाहरणे संयुक्त गुणोत्तराचे द्या.

टक्केवारी

खालील उदाहरणे गृहीत धरा.

एम.के. नगरच्या हायस्कुल विद्यार्थ्यांनी एक सामाजीक कार्यक्रमासाठी टिकीट विकायचे ठरविले वर्ग 8 व्या विद्यार्थ्यांकडे 300 टिकीट विकण्यासाठी आहेत आणि वर्ग 7 व्या जवळ 250 टिकीट आहेत. कार्यक्रमाच्या एक तास अगोदर 8 व्या वर्गाच्या विद्यार्थ्यांनी 225 टिकीट विकली आणि 7 व्या वर्गांनी 200 टिकीट विकली.

कोणत्या वर्गाचे विद्यार्थी त्याचा टिकीट विकण्याचे लक्ष पुर्ण केले.?

कोणत्या वर्गाचे विद्यार्थी त्याचा लक्षाच्या जवळ होते. गुणोत्तरांची तुलना करण्याचा प्रयत्न करा. 225:300 आणि 200:250. 8 व्या वर्गाच्या विद्यार्थ्यासाठी गुणोत्तर 3:4 आहे. आणि 7 व्या वर्गाच्या विद्यार्थ्यासाठी गुणोत्तर 4:5 आहे. तुम्ही तुलना करुन सांगु शकता का ? अर्थवंत तुलना होणे कठिन आहे. म्हणुन आपण सरळ सांगु शकता नाही. आपणास समान असलेले गुणोत्तर हवे आहे. राशींची तुलना करण्याचा एक मार्ग त्यानी टक्केवारी बदलते.

टक्केवारी (%) 100 संख्या सोबत तुलना करते. शेकडा म्हणजे प्रति शंभराला किंवा 100 पैकी $100\% = \frac{100}{100}$ हे देखील अपुर्णांक आहे आहे ज्याचा छेद 100 आहे.

8 व्या वर्गाच्या विद्यार्थ्यांनी विकलेल्या टिकीटाची शेकडा $= \frac{3}{4} \times \frac{100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$

7 व्या वर्गाच्या विद्यार्थ्यांनी विकलेल्या टिकीटाची शेकडा $= \frac{4}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$

याच्या पासुन आपणास कळते की 7 व्या वर्गाच्या विद्यार्थ्यांचे लक्षच्या जवळ आहेत. टक्केवारी म्हणजे 100 मधील भागाची संख्या आहे. म्हणुन छेदाला 100 बनविले पाहिजे ज्यांच्या अंशाला आणि छेदाला 100 ने गुणाकार करीत आहोत.

SCERT TELANGANA

आपण टक्केवारीला सामान्य मोजपट्टी म्हणुन वापरतो.

परिचयाच्या भागात आपण स्नीग्धा ला आलेले मत आणि सिरिला आलेले मताचे गुणोत्तराची तुलना केली. याला आपण टक्केवारी देखील तुलना करु शकतो.

स्नीग्धा ला पडलेली मते 40 पैकी 24 किंवा 5 पैकी 3 संक्षिप्त रुपात म्हणुन मताची टक्केवारी $\frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$	40 मतापैकी स्नीग्धा ला 24 मते आली. म्हणुन 100 मतापैकी स्नीग्धाला पडलेली मते $= \frac{24}{40} \times 100 = 60$ 100 मतापैकी 60 मते तिला पडली म्हणुन मताचा शेकडा मते = 60% होतात.

म्हणुन सर्व विद्यार्थ्यांनी मते टाकली.

स्नीग्धाची शेकडा मते + सिरिचे शेकडा मते = 100%

60% + सिरिची शेकडा मते = 100%

म्हणुन सिरिचे शेकडा मते = 100% – 60% = 40%

5.2 कमी किंवा जास्त टक्केवारी माहित करणे

खालील परिस्थितीला गृहीत धरा.

- वर्गाचा आकार 10% ने वाढला आहे.
- घराचे भाडे 12% ने घटले आहे.
- 2020 पर्यत CO_2 चे बाहेर पडते 25% ची कमी दाखविते.

राशीमध्ये बदल हे नेहमी त्याच्या मुळ राशिचे टक्केवारी मध्ये दर्शविते.

दोन वेगवेगळ्या पध्दती आहेत. ज्यांना शेकडा वाढ किंवा कमी प्रश्नामध्ये सोडविण्यासाठी वापरले जाते. याला समजण्यासाठी खालील उदाहरणे

(1) एका विक्री मेनेजरने त्याच्या संघाला विचारले की त्याची विक्री 35% गेल्या महिण्यापेक्षा वाढविले पाहिजे जे की, 98,700 रुपये होते. तर आता त्याची विक्री कितीला होईल. ?

गेल्या महिण्यातील विक्री = 98,700. रुपये 35% of 98,700रुपये $= \frac{35}{100} \times 98,700$ = 34545 रुपये या महिण्यातील विक्री चे लक्ष = 98,700रुपये + 34,545 = 1, 33, 245.रुपये	एकमान पध्दत 35% वाढ म्हणजे 100रु.ची वाढ 135 रु. झाली 98,700 रुपये किती वाढते ? वाढलेली रक्कम $= \frac{135}{100} \times 98,700$ रु. = 1,33,245.रु.

दरामध्ये शेकडा कमी म्हणजे मुळ कमी होणे हे मुळ किंमतुन वजा केल्याने येते. चला एक उदाहरण याला समजण्यासाठी घेऊ या.

SCERT TELANGANA

(2) एका बुटाची मुळ किंमत 550 रु. आहे ते 10% कमीने विक्रीस आहेत. तर बुटाची नविन विक्री किंमत काय हाईल?

बुटाचा दर = 550 रु.

समीकरण = 10% वर 550 रु.

$= \frac{10}{100} \times 550 = 55$ रु.

नविन किंमत = मुळ किंमत – कमी रक्कम

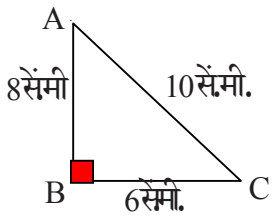
= 550रु. – 55रु. = 495 रु.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. एका संख्येचे दुप्पट म्हणजे संख्येत 100% ने वाढ आहे. जर आपण अर्धा संख्या घेतली तर शेकडा कमी किती होईल ?
2. किती शेकड्याने 2400 रुपयांचे 2000 रुपये कमी होतील. हे 2400 रुपये हे 2000 रुपये पेक्षा जास्त आहे म्हणुन शेकडा समान आहे का ?

अभ्यास - 5.1

1. खालील चे गुणोत्तर काढा.
   (i) स्मीता एका कार्यालयात 6 तास काम करते आणि काजल 8 तास काम करते त्याच्या कामाचे गुणोत्तर काढा.
   (ii) एका भांड्यात 8 लिटर दुध आहे तर दुसऱ्यात 750 मि.ली.
   (iii) एका सायकलीचा वेग 15 कि.मी./ तास आहे आणि स्कुटरचा वेग 30 कि.मी./ तास आहे.
2. जर संयुक्त गुणोत्तर 5:8 आणि 3:7 चे 45:x. आहे तर x किती.
3. जर 7:5 आणि 8:x संयुक्त गुणोत्तर 84:60. आहे तर x काढा.
4. जर 3:4 चे संयुक्त गुणोत्तर आणि 4:5 चे व्यस्त गुणोत्तर 45:x. आहे तर x ची किंमत किती.
5. एका प्राथमिक शाळेत 60 विद्यार्थ्यांसाठी 3 शिक्षक आहेत तर त्या शाळेतील 400 विद्यार्थी भरती झाले तर आणखी किती शिक्षकांची आवश्यकता असेल.?
6. दिलेल्या आकृतीत ABC हा त्रिकोण आहे. शक्य तेवढे गुणोत्तर त्रिकोणाच्या कोणत्याही जोड बाजु घेऊन काढा.



SCERT TELANGANA

7. एका परिक्षेत 24 पैकी 9 विद्यार्थ्यांनी 75% पेक्षा कमी गुण मिळविले 75% च्या कमी आलेले विद्यार्थी आणि 75% किंवा त्यापेक्षा जास्त गुण मिळविलेल्या विद्यार्थ्यांचे गुणोत्तर काढा.

8. दिलेल्या शब्दात MISSISSIPPI' मध्ये स्वराच्या संख्याचे गुणोत्तर आणि व्यंजनाच्या संख्येचे गुणोत्तर काढा.

9. राजेंद्र आणि रेहनाने एक धंदा / व्यापार सुरु केला. रेहनाला 25% नफा प्रत्येक महिण्याला मिळाला. रेहनाला एका निश्चित महिण्यात 2080 रुपये मिळाले तर त्या महिण्यात एकुण किती नफा झाला ?

10. त्रिकोण ABC मध्ये AB = 2.2 सें.,मी., BC = 1.5 सें.मी. AC = 2.3 सें.मी. त्रिकोण XYZ मध्ये XY = 4.4 सें.मी. YZ = 3 सें.मी. आणि XZ = 4.6 सें.मी. तर AB : XY, BC : YZ, AC : XY. चे गुणोत्तर काढा ΔABC आणि ΔXYZ च्या परस्पर बाजु गुणोत्तरात आहेत का ?

[सुचना : कोणतेही दोन त्रिकोण समान गुणोत्तर असतात जर त्यांच्या बाजु समान गुणोत्तरात असतील]

11. माधुरी एका सुपर बाजाराला गेली. भाव खालील प्रकारे बदलतो. तांदुळाचा भाव 5% ने कमी झाला आणि जाम आणि फळे 8% आणि तेल आणि दाळ 10%.ने कमी झाले तर माधुरीला मदत करा की खाली दिलेल्या तक्त्यात बदलल्या किंमती कोणत्या आहेत.

वस्तु	मुळ किंमत /कि.ग्रा.	बदलेली किंमत
तांदुळ	30 रुपये	
जाम	100 रुपये	
सेप	280 रुपये	
तेल	120 रुपये	
दाळ	80 रुपये	

12. गेल्या वर्षी एका क्लब मध्ये 2075 सदस्यांची नोंद झाली. तर दुसऱ्या वर्षी संदस्यांची नोंद 4% ने कमी झाली आहे.
(a) कमी झालेली नोंद माहित करा.
(b) या वर्षी किती सदस्यांची नोंद झाली आहे.?

13. एका शेतकऱ्यांला गेल्या वर्षी 1720 पोते कापुस पिकला. या वर्षी त्याने 20% पिक वाढले अशी अपेक्षा ठेवली. तर ती किती पोते कापुस पिकण्याची त्याची अपेक्षा आहे.?

5.3 सुट माहित करणे

मोठ मोठ्या दुकाणात आणि बाजारात आपण वस्तुचे भाव फलक पाहतो. आपण त्याला काय म्हणतो ? त्याला छापील किंमत **(M.P.)** म्हणतात. एका कारखाण्याव्दारे ठरविलेली किंमत वस्तुवर छापली जाते ज्याला वस्तुची भाव फलक पट्टी असे म्हणतात.

SCERT TELANGANA

रवि एका दुकानात पुस्तक विकत घेण्यासाठी गेला पुस्तकाची छापील किंमत 80 रुपये आहे. परंतु दुकानदाराने 15%.सुट दिली. रविला पुस्तक विकत घेण्यासाठी किती पैसे द्यावे लागतील.?

आपल्या दैननंदिन जिवनात आपण बरेचशा परिस्थिती शी संपर्कात येतो. जेथे आपणास वस्तुवर सुट मिळते.

किंमतीवरची त्याला सुट म्हणतात. हे छापिल पट्टीवर किंवा भाव फ लकावर दिली जाते.

आता वरील उदाहरणात रविला 15% सूट देण्यात आली. छापील किंमत 80 रुपये आहे. तर सुट

$\frac{15}{100} \times 80 =$ 12 रुपये होते. त्याला भरायचे पैसे 80 - 2 = 68 रुपये आहेत.

आणखी काही उदारहरणे पाहु या.

उदाहरण:1 एका सायकिलची छापील किंमत 3600 रुपये आहे. आणि 3312 रुपये ला विकली तर सुट आणि शेकडा सुट किती माहित करा ?

सोडवणुक: सुट = छापिल किंमत - विक्री किंमत

= 3600रुपये – 3312रुपये = 288 रुपये

म्हणुन सुट ला छापिल किंमतीवर काढले जाते. शेकडा सुट माहित करण्यासाठी आपण छापिल किंमतीला आधार समजतो. 3600 रुपये छापिल किंमतीवर सुट 288 रुपये आहे. 100 रुपये छापील किंमतीवर किती सुट मिळेल.

शेकडा सुट $= \frac{288}{3600} \times 100 = 8\%$

जेंव्हा शेकडा सुट दिली असेल तर आपण सुट माहित करु शकतो.

उदाहरण:2 एका पंख्याची छापील किंमत 1600 रुपये आहे.आणि दुकानदाराने 6% ची सुट दिली तर विक्री किंमत माहित करा.

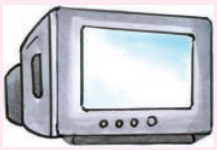
सोडवणुक:

राजु ने अशा प्रकारे सोडविले	लता ने वेगळया पध्दतीने सोडविले.
1600 रुपयांवर = 6% सुट $= \frac{6}{100} \times 1600 =$ ₹96 विक्री किंमत = छापिल किंमत - सुट = 1600रु – 96 रु = 1504 रु	6% कमी म्हणजे 100 रु कमी होऊन 94 रु. होतात. म्हणुन 1600 रु. किती कमी झाले? विक्री किंमत $= \frac{94}{100} \times 1600 =$ ₹1504 रुपये

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करा

1. खालील मध्ये विक्री किंमत भरा

वस्तु	छापिल किंमत	सुट	विक्री किंमत रु.
	450	7%	
	560	9%	
	250	5%	
	15000	15%	

उदाहरण: 3 निलीमा दुकानात ड्रेस खरीदण्यासाठी गेली. ड्रेसची छापील किंमत 1000 रुपये आहे. दुकान मालकाने आगोदर 20% सुट आणि नंतर 5%.सुट दिली. एकच सुट काढा जो दोन क्रमवार दोन सुटेच्या समान आहेत.

सोडवणुक: वस्तुंची छापील किंमत = 1000 रु.

पहिल्या सुटेची टक्केवारी = 20%

पहिली सुट = 1000रु चा 20%

$$= \frac{20}{100} \times 1000 = 200 \text{ रु}$$

पहिल्या सुटच्या नंतर ची किंमत = 1000 रु – 20

= 800 रु

दुसऱ्या सुटची टक्केवारी = 5%

दुसऱ्या सुटची किंमत =800 रु चा 5%

$$= \frac{5}{100} \times 800 = 40 \text{ रु}$$

दुसऱ्या सुटच्या नंतरची किंमत = 800रु – 40रु = 760 रु

रोख विक्री किंमत = 760 रु

20% सुट म्हणजे 100 रुपयांचे कमी होऊन 80 रुपये

5% सुट म्हणजे 100 रुपये कमी होऊन 95 रुपये

∴ रोख विक्री किंमत

$$= 1000 \times \frac{80}{100} \times \frac{95}{100}$$

= 760 रु

SCERT TELANGANA

एकच सुट म्हणजे दिलेली सुट =1000 रु – 760 रु = 240 रु
1000 रुपयाला सुट = 240 रुपये

एकच वेळा दिलेल्या सुट ची टक्केवारी = $\frac{24\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{00}} \times \cancel{100} = 24\%$

तुम्हाला काय आढळुन येते.? एकाच सुटची टक्केवारी क्रमवारी सुटच्या समान असते का.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

प्रिती एका दुकानात ड्रेस विकत घेण्यासाठी गेली. त्याची छापील किंमत 2500 रुपये आहे. दुकानदराने 5% ची सुट दिली. पुन्हा आग्रह केल्यामुळे 3% ची सुट दिली तर शेवटी तिला एकुण किती सुट मिळाली? 8% सुटच्या बरोबर आहे का ? विचार करा आणि तुमच्या मित्रासोबत चर्चा करा आणि तुमच्या वहित लिहा.

5.4 टक्केवारीचा अंदाज

तुमच्या दुकानातील पावती 477.80 रुपये आहे आणि दुकानदार 15%ची सुट देते तुम्ही जमा करावयाची रक्कमचा कसा अंदाज लावसाल?

पावतीला जवळच्या रक्कम एवढे गोल करा. 477.80 रुपयाला 480 रुपये गोल केले आहे. नंतर रक्कमेच्या10% काढा. ते 48 रुपये आहे. याचे अर्धे घ्या. हे 24 रुपये येते. म्हणुन सुट रक्कम 48+24=72 रुपये येते देयाची रक्कम सुमारे 410 रुपये होईल.

प्रयत्न करा

(i)357.30 रु.वर20% चा अंदाजलावा (ii) 375.50 रु.वर 15% चा अंदाज लावा.

5.5 नफा आणि तोटा

खरेदी आणि विक्री किंमतीच्या संबंधीत (नफा आणि तोटा)

खालील उदाहरणाचे निरिक्षण करा.

- सीताने 750 रुपयाला खुर्ची विकत घेऊन 900 रुपयाला विकली.
- मेरीने 10 ग्राम सोने 25000 रुपयाला गेल्या वर्षी घेतले आणि 30,000 रुपयाला या वर्षी विकले
- रहिमने एक सायकल 1600 रुपयाला विकत घेतली आणि येणाऱ्या वर्षी 1400 रुपयाला विकली.
- अनिताने एक कार 4.8 लाख ला विकत घेतली आणि 4.1 लाखाला दोन वर्षानंतर विकली.
- हारीने एक कार 9 लाखाला विकत घेतली आणि 1 लाख रुपये खर्च त्याला दुरुस्तीसाठी लावला त्याने 10.7 लाखाला कार विकली.

SCERT TELANGANA

पहिल्या चार उदाहरणात नफा आणि तोटा खरेदी किंमत आणि विक्री किंमत मधील वेगवेगळ्या पध्दतीने माहित केले.

परंतु शेवटच्या उदाहरणात हारीला प्राप्त झालेला नफा किती? ते 1.7 लाख रु. आहे का? मुळीच नाही त्याने विकण्याच्या अगोदर आणखी काही खर्च केला. तुम्ही तशा खर्चाला काय म्हणतात.?

काही वेळा दुकानदाराला अधिक खर्च करावा लागतो जसे वाहतुक सांभाळणे, कर्मचारी, दुरुस्ती नफा खालीचे भाडे इत्यादी हे सर्व वस्तुच्या विक्री किंमतीच्या अतिरिक्त असते. अशा खर्चाला आपण आधिक खर्च म्हणतात. आणि हे खरेदी किंमतीत मिळतात. नफा किंवा तोटा नेहमी या आलेल्या खेरदी किंमती वर काढतो.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

काय होईल जेव्हा खरेदी किंमत = विक्री किंमत तुम्हाला अशा प्रकारचे काही उदाहरणे तुम्च्या दैनंदिन जिवनात मिळता का ? वरील परिस्थितीत नफा किंवा तोटा माहित करणे सोपे आहे. ते अधिक अर्थपुर्ण होईल जर आपण त्याला टक्केवारी मध्ये दर्शविले तर नफा % म्हणजे शेकडा वाढीचे उदाहरण आहे खरेदी किंमतीमध्ये आणि तोटा म्हणजे खरेदी किंमतीत कमी होने आहे.

चला काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण:4 राधिका दुसऱ्या दर्जाचे वस्तु वापरते तिने वापरलेले फ्रि ज 5000 रुपयाला आणले. तिने 100 रुपये वाहतुकी वर खर्च केले आणि 500 रुपये त्याच्या दुरुस्तीवर तिने ते 7000 रुपयाला विकले.

(i) फ्रि ज ची एकुण खरेदी किंमत (ii) नफा किंवा तोटा शेकडा

Solution: (i)एकुण खरेदी किंमत = विक्री किंमत + वाहतुक खर्च + दुरुस्ती खर्च

= (5000 + 100 + 500) = 5600 रुपये

म्हणुन एकुण खरेदी किंमत 5600 रुपये

(ii) विक्री किंमत 7000रुपये येथे विक्री किंमत > खरेदी किंमत, म्हणुन

नफा = विक्री किंमत – खरेदी किंमत = 7000 रुपये – 5600 रु. = 1400 रुपये.

5600 रुपये खरेदी किंमतीवर नफा 1400 रुपये

जर खरेदी किंमत 100 रुपये असेल तर नफा किती होईल.?

शेकडा नफा = $\frac{1400}{5600} \times 100 = 25\%$

उदाहरण:5 विनयने एक प्लाट 4,50,000 रुपये ला विकत घेतले. त्याने 10,000 रुपये रंग मारण्यासाठी आणि दुरुस्तीवर खर्च केले. नंतर त्याने 4,25,000 रुपयाला विकले. त्याचा नफा किंवा तोटा आणि टक्केवारी देखील माहित करा.

सोडवणुक: एकुण खरेदी किंमत = विक्री किंमत + दुरुस्ती खर्च

= (4,50,000 + 10,000) = 4,60,000 रुपये

SCERT TELANGANA

विक्री किंमत 4,25,500रुपये आहे. येथे आपण निरिक्षण करु या कि विक्री किंमत खरेदी किंमतीच्या कमी आहे. म्हणुन येथे तोटा आहे.

तोटा = खरेदी किंमत - विक्री किंमत

= 4,60,000 – 4,25,500 = 34,500 रुपये.

4, 60, 000 खरेदी किंमतीचा तोटा 34,500 जर त्याची खरेदी किंमत 100 असेल तर तोटा किती होईल ?

शेकटा तोटा = $\frac{34,500}{4,60,000} \times 100 = 7.5\%$

उदाहरण:6 वेंकनाने 50 डझन केळी 1250 रुपयाला विकत घेतली त्याने 250 रुपये वाहतुक भाडे लावले तो पाच डझन केळी सडल्यामुळे विकु शकला नाही.त्याला तोटा की नफा होतो. तोटा किंवा नफा शेकडा काढा?

सोडवणुक: एकुण खरेदी किंमत = केळीची खरेदी किंमत + वाहतुक भाडे

= 1250 + 250 = 1500

विकलेल्या एकुण केळीची संख्या = विकत घेतलेल्या केळीची संख्या - सडलेल्या केळी ची संख्या

= 50 – 5 = 45

विक्री किंमत = 35 × 45 = 1575

स्पष्ट विक्री किंमत > खरेदी किंमत म्हणुन नफा आहे.

नफा = विक्री किंमत – खरेदी किंमत = 1575 रु. – 1500 रु. = 75 रु.

1500 रुपयाच्या खरेदी किंमतीवर नफा 75 रुपये आहे.

100 रुपयाच्या खरेदी किंमतीवर नफा किती होईल ?

शेकडा नफा = $\frac{75}{1500} \times 100 = 5\%$

उदाहरण:7 मलीक प्रत्येक एक टेबल 3000 रुपयाला विकतो. त्याला एका टेबलावर 20% नफा आणि दुसऱ्यावर 20%.तोटा होते. त्याच्या पुर्ण लावादेवीवर नफा किंवा तोटा माहित करा.

SCERT TELANGANA

सोडवा:

पहिल्या तक्त्यासाठी	दुसऱ्या तक्त्यासाठी
विक्री किंमत = 3000 रु.	विक्री किंमत = 3000 रु.
शेकडा नफा = 20%	शेकडा तोटा = 20%
शेकडा नफा म्हणजे खरेदी किंमतीवर शेकडा वाढ होय	शेकडा तोटा म्हणजे खरेदी किंमतीवर शेकडा घट होय
जेव्हा खरेदी किंमत 100 रुपये तेव्हा विक्री किंमत 120 आहे.	जेव्हा खरेदी किंमत 100 रुपये तेव्हा विक्री किंमत 80 आहे.
जेव्हा विक्री किंमत 3000 रुपये असेल तर खरेदी किंमत काय होईल ?	जेव्हा विक्री किंमत 3000 रुपये असेल तर खरेदी किंमत काय होईल ?
खरेदी किंमत $= 100 \times \frac{3000}{120} = 2500$	खरेदी किंमत $= 100 \times \frac{3000}{80} = 3750$

दोन टेबलावर एकुण खरेदी किंमत = 2500रु. + 3750 रु. = 6250 रु.

दोन टेबलावर एकुण विक्री किंमत = 3000 रु. + 3000रु. = 6000 रु.

म्हणुन खरेदी किंमत > विक्री किंमत म्हणुन तोटा होतो.

तोटा = खरेदी किंमत – विक्री किंमत = 6250 रु. – 6000रु. = 250 रु.

6250 रु. च्या खरेदी किंमतीवर तोटा 250 रु. आहे.

100रु.च्या खरेदी किंमतीवर तोटा किती होईल ?

शेकडा तोटा $= 250 \times \frac{100}{6250} = 4\%$

एकुण लावादेवीवर तोटा 4% आहे.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

एका दुकानदाराने दोन टी.वी प्रति 9, 900 रु. ला विकल्या. त्याने एक 10% नफ्याने ने विकली आणि दुसरी 10% तोट्याने विकली. एकुण त्याला नफा किंवा तोटा होतो का. जर असेल तर त्याची टक्केवारी काढा ?

5.6 विक्री कर / value added Tax (VAT)

शासन प्रत्येक विक्रीवर कर वसुल करते त्याला VAT म्हणतात. दुकानदार हा कर ग्राहकांडुन वसुल करतो आणि शासनाला भरतो. अशा प्रकारचा कर शासन का वसुल करते ? हे तुम्हाला माहित आहे का ? वसुल केलेल्या करापासुन शासन बरेच सामाजिक कार्य करते.

SCERT TELANGANA

सर्व वाहणाऱ्या वस्तुवर विक्री कर लागु होतो. फक्त वस्तुवर VAT कर लागु होतो. सेवेवर नाही. वेगवेगळ्या वस्तु साठी वेगवेगळे VAT असतात. सर्व साधारण पणे खुप गरजेच्या वस्तुवर VATसुट मिळते. 1% महाग असलेले खडे 5% औद्योगीक अवजारे आणि महत्वाच्या वस्तुवर आणि बाकी वस्तुवर 14.5% कर लागतो.

VAT हा विक्री किंमतीवर लागतो. आणि याला आपल्या पावतीत मिळविल जाते. VAT हे विक्री किंमतीच्या शेकडा व्यस्त आहे. खालील VAT मिळविलेली पावती चे निरिक्षण करा.

गणपती एक औषधाच्या दुकानात त्याच्या आईसाठी औषध विकत आणण्यासाठी गेला. दुकानदाराने पावती दिली. जे अशी दिसते पावती 372.18 रुपये ची होती. त्याच्यात 5% VAT होता.

(i) विक्री VAT मिळालेला होता.

Tax Invoice No. : 2012?301549007214 दिनांक : 15-09-2012 20:48:31

नाव : गणपती वय : 35 Gender : Doc:dr Do.Reg. No. :

Cus.ID:20121301549000617 Add: Sainathpura)

S.	वस्तु	Mfgr	Sch	Batch	Exp.	MRP.	दर	नग	रक्कम
1	BETATROP TAB	SUN	H	BSK4198	12-14	5.9	5.9	60	318.60
2.	ECOSPRIN 150 MG TAB	USV	H	04004652	05-14	0.4242857	0.38	42	16.04
3.	LASIX 40 MG TAB	AVENTIS	H	0212016	03-16	0.44733334	0.40	15	6.04
4.	ELDERVIT PLUS CAD	ELDER	C	SE0022008	08-13	2.3333333	2.10	15	31.5

राखिव रक्कम : 41.35 VAT ON 354.45 @ 5% = 17.72 एकुण : 372.18

एकुण देयक : 372.00

पावती वरुन हे स्पष्ट आहे की, पावतीची रक्कम = 354.45 ,Vat @ 5% = 17.72

उदाहरण:8 एका बुटाच्या जोडीची किंमत 450रुपये आहे. त्याच्यावर विक्री कर 6% आहे. तर त्याची पावती रक्कम किती हे माहित करा.

सोडवणुक: 100रु.वर विक्री कर भरायाचा 6 रु.

तर 450रु.वर विक्री कर किती भरावा लागेल ?

भरलेली विक्री कर = $\frac{6}{100} \times 450$ = 27रु.

पावतीची रक्कम = वस्तुची किंमत + विक्री कर = 450रु. + 27रु. = 477 रु.

5.7 माल आणि सेवा कर (Goods and Service Tax) GST

हे एक मुकुलते अप्रत्यक्ष माल पुरवताना भावव्यान येणारा सेवा कर आहे तथा कशाला 2017 जुलै मध्ये परिचय करुन दिला असुन या करामध्ये अबकारी कर (Excise Tax) आणि विक्रि कर

SCERT TELANGANA

जो भारतात होना तो काढुन टाकण्यात येवुन GST मध्ये VAT म्हणुन असलेल्या करासोबत मालाच्या हालचाली च्या प्रत्येक पायरीवर लादव्यात आले या सोबत सेवाकर ही जोडण्यात आले.

वेगवेगळ्या कराचे स्लॅब 3%, 5%, 12% आणि 28% असे लादले हे कर बहुतेक माल आणि सेवा मध्ये लादला. ही लादी (slab) सर्व भारतात समान ठेवण्यात आले ही लादी 50% केंद्रीय सरकार व 50% राज्य सरकारला देण्यात येते.

उदाहरण 9 :- विज्ञेश उफा दुकानात जाबून त्याच्या कुटुंबासाठी सावण विकत होतो तर त्याला 18% GST देवुन 2200 रू ची पावनी मिळते आणि ती चुकती करतो तर GST पुर्वीचे किमत CGST आणि SGST चा वाटा किती राहील

वस्तुचे नाव	परिणाम	दर किंमत	रक्कम
साबण	100	20	2000
पावडर साबण	2	100	2000
			2200

सोडवणुक:- GST सकट किंमत = 2200 ₹

GST चा दर = 18%

$= 2200 \times \frac{18}{100} = 2396$

GST च्या पुर्वी किंमत = 2200 - 396 = ₹1804

CGST ची GST ते किंमत = 2200 - 396 = ₹1804

SGST ची GST ते किंमत = 50%

CGST ची GST ते किंमत = 50%

CGST ची GST मध्ये = $396 \times \frac{50}{100}$ = ₹198

त्याचप्रमाणे SGST ची GST मध्ये = $396 \times \frac{50}{100}$ = ₹198

SCERT TELANGANA

उदाहरण 10:- एका बुयची जोडीची किमत ₹1000 आहे GST त्यावर 5% लादण्यात आला तर त्याची किंमत काय राहील

सोडवणुक :- 100 रुपयावर GST 5 रुपये ध्यावे लागते तर ₹1000 वर किती कर ध्यावा लागतो.

GST कर = ₹ $\frac{5}{100}$ x 1000 = ₹ 50

एकुण किंमत = वस्तुची किंमत + GST

= ₹ 1000 + 50

= ₹ 1050

अभ्यास- 5.2

1. 2012 वर्षामध्ये असा अंदाज लावला गेला कि,संपुर्ण जगात इंटरनेट वापणाऱ्यांची संख्या 36.4 कोटी होईल. येणाऱ्या दहा वर्षात ही संख्या 125% होईल असा अंदाज आहे.

2. एक घर मालक आपल्या घराचे भाडे प्रती वर्षी 5% ने वाढवितो. जर नविन भाडे 2500 रु. प्रति महा असेल तर दोन वर्षानंतर किती भाडे होईल ?

3. सोमवारी एका कंपनीच्या शेर ची किंमत 7.50रु.होती. मंगळवारी ती किंमत 6% ने वाढली. आणि 1.5% ने बुधवारी घटली आणि 2% ने गुरुवारी कमी झाली. जेव्हा व्यापार सुरु होईल तर शुक्रवारी त्याची किंमत काय होईल ते सांगा.

4. झेरॉक्स मशिनीचा वापर करुन तुम्ही तुमच्या प्रतिला लहान किंवा मोठे करु शकता. रेशमाला 2 सें.मी. ला 4 सें.मी. ने काढायचे होते. तिने झेरॉक्स मशीनला 150% प्रति साठी तयार केले तर येणाऱ्या प्रतिचा आकार काय राहणार माहित करा ?

5. एका पुस्तकाची छापील किंमत 150रु. आहे आणि शेकडा नफा 15% आहे. तर मुळ किंमत किती भरावी लागते काढा.

6. एक भेट वस्तुची छापील किंमत 176 रु.आहे आणि ती 165रु. ला विकली तर शेकडा सुट माहित करा.

7. एका दुकानदाराने 200 बल्ब प्रत्येकी 10रु. ने विकत घेतले. त्यापैकी 5 बल्ब बंध असल्यामुळे त्यांना बाजुला ठेवले. आणि बाकीचे बल्ब प्रत्येकी 12 रु. विकले. तर नफा किंवा तोटा काढा.

8. खालील तक्त्यात अचुक माहिती आवश्यक असेल तेथे घेऊन पुर्ण करा.

SCERT TELANGANA

अ.क्र.	खरेदी किंमत (उ.झ.)	खर्च	विक्री किंमत (ड.झ.)	नफा	तोटा	शेकडा नफा	शेकडा तोटा
1	750रु.	50रु.		80रु.			
2	4500रु.	500रु.			1,000रु.		
3	46,000रु.	4000रु.	60,000रु.				
4	300रु.	50रु.				12%	
5	330रु.	20रु.					10%

9. एक टेबल 2,142रु. ला 5% नफा ने विकला. 10% नफा मिळविण्यासाठी तो टेबल कितीने विकला पाहिजे.

10. गोपीने इब्राहिमला एक घड्याळ 12% नफा याने विकली आणि इब्राहिमने जॉनला 5% नफा याने विकली.जर जॉनने1,330 रु. भरले तर गोपीने ती घड्याळ कितीला विकली होती ?

11. मधुने आणि कविताने एक नविन घर 3,20,000 रुपयाला विकत घेतले. काही आर्थिक अडचणीमुळे त्यांनी 2, 80,000 रुपयाला विकले. तर माहित करा.
(a) त्यांना झालेला तोटा (b) शेकडा तोटा

12. एका कार शोरुमचा मालकाने एक जुनी कार 1,50,000 रु. ला विकत घेतली. त्याने 20,000रु. दुरुस्तीला खर्च केले आणि नंतर 2,00,000 रु. विकली तर माहित करा की त्याला नफा किंवा तोटा होतो जर असे होत असेल तर टक्केवारी किती ?

13. ललीता ने एक पार्सल होटल मधुन तिच्या मैत्रिनीचा वाढदिवस साजारा करण्यासाठी घेतले. त्याला 1,450 रुपयाची पावती 5% VATसहीत होती ललीताने काही सुट मागली आणि होटल मालकाने 8% सुट देऊन पावतीचे पैसे घेतले. आता, ललीताने होटल मालकाला मुळ किंमत किती दिली माहित करा.

14. जर GST मुळ किंमतीत मिळविला तर खालीलची मुळ किंमत काढा.

अ.क्र.	वस्तु	GST %	पावती रक्कम(रु.)	मुळ किंमत(रु.)
1	हिरा	1%	10,100 रु.	
2	प्रेसर कुकर	5%	2,940 रु.	
3	तोंडाचे पावडर	14.5%	229 रु.	

खालील अंशाची विक्री किंमत काढा जेव्हा विक्री कर 8.5% त्या वस्तुवर मिळविला.
(i) 50 रु.चा रुमाल (ii) 35 रुपये प्रति दोन साबनाच्या वड्या

15. सेल फोन कंपनीचे सेलफोनची किंमत 4500 रु. ठरवले डिलर ने ते सेल फोन विकत घेवुन त्याची किंमतीवर 12 % GST दिले तर डिलर ने किती रक्कम GST म्हणुन दिले. त्या सेलफोन

SCERT TELANGANA

ची खरेदी किंमत किती असील.

16. सुपर बजार मध्ये एका वस्तुची किमत रुपये आणि पैसा मध्ये असुन 4% बिक्रि कर (Sales tax) लावण्यात आला त्याला पुर्ण अंकात रुपये आले ते म्हणजे 'n' रुपया 'n' ही घन पुर्णांक आहे तर 'n' सर्बात लहान किंमत किती असु शकेल.

5.8 चक्रवाढ व्याज

व्याज म्हणजे ते पैसे जेव्हा बँक किंवा डाकघर देते. जेव्हा त्याच्याजवळ आपण पैसे जमा करतो. लोकांकडुन येणारा पैसा जेव्हा ते उसने घेतात. व्याज म्हणजे मुळ रक्कमेवर आधिक रक्कम जमा करणे म्हणजे वर्षाच्या शेकडा प्रमाणे होय.

परंतु आपण व्याज कसे मोजतो ? जर व्याज वर्षभर मुळ रक्कमेवर संपुर्ण कर्जाचा काळानुसार समान रुपात वसुल केलेली रक्कम होय. तुम्ही अशा प्रकारे मोजणाऱ्या व्याजाला काय म्हणतात ? हो याला साधारण व्याज असे म्हणतात. हे म्हणजे मुळ रक्कमेवर शेकडा वाढ आहे. याला समजण्यासाठी हे उदाहरण पहा.

उदाहरण:9 2500 रु. एकुण 12% व्याजाने प्रत्येक वर्षाला 3 वर्षा पर्यंत उसने घेतले. या रक्कमेवर साधारण व्याज काढा आणि 3 वर्षाच्या शेवटी जमा करण्याच्या रक्कमेवर माहित करा.

सोडवणुक: 12% व्याजाचा दर म्हणजे 100रु. एका वर्षासाठी 12 रु. म्हणुन 2500रु.वर एक वर्षासाठी लावलेले व्याज किती ?

एक वर्षासाठीचे व्याज $= \frac{12}{100} \times 2500 =$ ₹300 रु.

तीन वर्षासाठीचे व्याज $= 3 \times \frac{12}{100} \times 2500 = 900$ रु.

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{PTR}{100}$$

I = व्याज, P = मुद्दल रक्कम = 2500 रु.

T = काळ वर्षामध्ये = 3, R = व्याज दर = 12

तीन वर्षाच्या शेवटी जमा करावयाची रक्कम = मुद्दल + व्याज

= 2500रु. + 900रु. = 3400 रु.

रक्कम = मुद्दल + व्याज $= P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$

SCERT TELANGANA

जेव्हा $t = 1$ वर्ष, रक्कम $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$

प्रयत्न करा :

तक्ता पुर्ण करा.

अ.क्र.	मुद्दल (P) रु.	वेळ (T) वर्षामध्ये	व्याज दर p.a. (R) in %	व्याज (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ रु.
1	3000	3	6	
2		2	5	50
3	1875		12	675
4	1080	2.5		90

रमेश ने 100 रु.10% व्याजाच्या दराने एक वर्षासाठी श्रीनु कडुन उसने घेतले. दोन वर्षानंतर तो श्रीनु कडे त्याचे कर्ज भरण्यासाठी गेला. रमेशने 120 रुपये दिले. आणि श्रीनु म्हणाला की आणखी एक रुपया द्यावा लागतो. त्या दोघ्यांमध्ये आलेले अंतर काढण्यासाठी त्यांनी एका कागदावर खालील प्रमाणे सोडविले.

रमेशची पध्दत			श्रीनु ची पध्दत		
पहिले वर्ष	मुद्दल रक्कम व्याज 10% एकुण रक्कम	100रु. 10रु. 110रु.	पहिले वर्ष	मुद्दल रक्कम व्याज 10% एकुण रक्कम	100रु. 10रु. 110रु.
दुसरे वर्ष	मुद्दल व्याज 10% दोन वर्षाच्या शेवटी भरावयाची रक्कम	100रु. 10रु. = मुद्दल + 1 वर्षाच्या रक्कमे वर व्याज + 2 वर्षाच्या रक्कमेचा व्याज = 100+10+10 = 120 रु.	दुसरे वर्ष	मुद्दल व्याज 10% दुसऱ्या वर्षाच्या शेवटी भरावयाची रक्कम	110रु. 11रु. 121रु.

दोन्ही पध्दतीतील फरक एक रुपयाचा आहे. हा फरक दोन्ही पध्दतीत का आहे ? हे तुम्हाला स्पष्टपणे आढळुन आल की दुसऱ्या वर्षाचे व्याज काढते वेळेस रमेश ने मुद्दल रक्कम 100रु. घेतली तर श्रीनुने 110 रु. घेतली. आपण रमेश व्दारे काढलेले व्याज सरळ व्याज आहे. आणि श्रीनु ने

SCERT TELANGANA

काढलेले व्याज चक्रवाढ व्याज आहे. श्रीनुने काढलेले व्याज मुद्दल मध्ये जमा झालेल्या रक्कमेवर काढले आहे. याला चक्रव्याज असे म्हणतात. म्हणुन चक्रवाढ व्याज हे व्याजावर व्याज आहे. कोणत्या प्रकारच्या व्याजाला तुम्ही महत्व देणार आणि केव्हा ?

5.9 चक्रवाढ व्याजाचे सुत्र काढणे.

वरील उदाहरणावर चर्चा करा, आपण निरिक्षण केले की, श्रीनुने चक्रवाढ व्याज मोजले . जर एक किंवा दोन वर्ष असतील तर हे सोपे आहे की आपण चक्रव्याज काढु शकतो. परंतु आपणास दोन वर्षपिक्षा जास्त असले तर अपाण अशाच पध्दतीने काढु शकतो का ? चला एक उदाहरण गृहीत धरा आणि माहित करण्याचा प्रयत्न करा.

जेव्हा t = 1वर्ष रक्कम (A) = $P\left(1+\frac{R}{100}\right)$ सरळ व्याजाने

समजा, P_1= 10,000फ रु.आणि R = 12% प्रत्येक वर्षी

श्रीनुची पध्दत			त्याच पध्दतीचे सामान्य करण		
पहिले वर्ष	मुद्दल P_1	10,000 रु.		मुद्दल	P_1
	रक्कम A_1	$10000\left(1+\frac{12}{100}\right)$	पहिले वर्ष	रक्कम A_1	$A_1 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		$=10000\left(\frac{112}{100}\right)$			
		= 11,200 रु.			
दुसरे वर्ष	मुद्दल P_2	11,200रु.	दुसरे वर्ष	मुद्दल	$P_2 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$
	रक्कम A_2	$11200\left(1+\frac{12}{100}\right)$		रक्कम A_2	$A_2 = P_2\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		$=11200\left(\frac{112}{100}\right)$			$=P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		= 12,544 रु.			$=P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$

अशाच प्रकारे तुम्ही करीत राहले तर 'n' वर्षाच्या शेवटी रक्कम $A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

साधारणपणे आपण असे म्हणु शकतो, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

SCERT TELANGANA

परंतु याला वापरुन आपणास फक्त 'n'वर्षाच्या शेवटी जमा रक्कम काढता येते. आपणास चक्रवाढ व्याज कसे मिळते ? हो हे खुप सोपे आहे. शेवटच्या रक्कमेतुन मुद्दल काढुन टाकली तर चक्रवाढ व्याज येते.

$$\therefore \text{C.I} = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

म्हणुन सरळ व्याज आणि चक्रवाढ व्याज मधील फरक काय आहे ? सरळ व्याज प्रत्येक व्याज प्रत्येक वर्षा सारखे असते परंतु चक्रवाढ व्याज वेळेनुसार वाढत जाते.

उदाहरण:10 एकुण रक्कम आणि चक्रवाढ व्याज किती होईल जर 5000 रु. 8% व्याजाच्या दराने दोन वर्षासाठी गुंतविले ?

सोडवणुक: P = 5000 रु. R = 8% आणि n = 2 वर्ष

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$= 5000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 5000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = 5832 \text{ रु.}$$

मिळालेले व्याज = रक्कम – मुद्दल

= 5832रु. – 5000रु.

= 832 रु.

हे करा

1. 20 000 रु. 6 वर्षासाठी 5% व्याजाच्या दराने चक्रवाढ व्याज काय होते ?
2. 12600 रु. 2 वर्षासाठी 10% व्याजाच्या दराने प्रत्येक वर्षी असलेले चक्रवाढ व्याज माहित करा.

5.10 वर्षवारी चक्रवाढ व्याज किंवा अर्धवर्ष (सहामाही व्याज)

तुम्ही गेल्या प्रश्नात निरिक्षण करु शकता की आपण चक्रवाढ हा शब्द वापरत आहे. त्याला काही महत्व आहे का ? हो त्याला आहे. कारण आपल्याला चक्रवाढ व्याजाचा दर सहा महिण्याला किंवा तिन महिण्यासाठी देखील काढु शकतो.

जेव्हा व्याज चक्रवाढ व्याजाने वर्षाला नाही काढले तर तुम्ही काळाला काय म्हणता ? जेव्हा व्याज मुद्दल मध्ये मिळविले जाते ? त्याला **बदलाचा काळ** असे म्हणतात. जेव्हा चक्रवाढ व्याज सहा महिण्याला काढतो. तेव्हा वर्षातुन दोन वेळा 6 महिण्यापर्यंचा काळ म्हणजे परिवर्तनेचा काळ होय. अशा संदर्भात व्याज हे अर्धे असते आणि काढलेले व्याज चक्रवाढच्या संख्येच्या दुप्पट असते.

SCERT TELANGANA

उदाहरण:11 1000 रु. वर एक वर्षासाठी 10% व्याजाच्या दराने चक्रवाढ व्याज काढा. जर चक्रवाढ व्याज सहामहिण्याला काढले तर किती होत.

सोडवणुक: जसे व्याज चक्रवाढ व्याज सहा महिण्याला एकदा काढतो. म्हणुन दोन परिवर्तीत काळ एकाच वर्षात येतात.

म्हणुन n=2

सहा महिण्यासाठी व्याजाचा दर = $\frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1000\left(\frac{105}{100}\right)^2$$

= 1102.50 रु.

चक्रवाढ व्याज = A – P = 1102.50 – 1000 = 102.50 रु.

हे करा

परिवर्तीत काळ माहित करा. प्रत्येकी व्याजाचा दर

1. एकुण रक्कम $1\frac{1}{2}$ वर्षासाठी 8% प्रत्येक वर्षाला चक्रवाढ व्याजाने6महिण्यासाठी घेतली आहे.
2. एक रक्कम 2 वर्षासाठी 4% प्रत्येक वर्षी चक्रवाढ व्याज प्रत्येक सहा महिण्याला काढा.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

काय होईल जेव्हा चक्रवाढ व्याज तिन महिण्याला काढले तर ? किती परिवर्तीत काळ राहतील तीन महिने काळाचा व्याजाचा दर वर्षाला व्याजाचा दर किती होईल ? तुमच्या मित्रा सोबत चर्चा करा.

उदाहरण:12 12000रु. कर्ज $1\frac{1}{2}$ वर्षासाठी 10% व्याजाच्या दराने प्रत्येक वर्षाला घेतले तर किती रक्कम पुन्हा पतर द्यावी लागेल जर चक्रवाढ व्याज सहा महिण्याला एकदा लावले तर

सोडवणुक: जर चक्रवाढ व्याज सहा महिण्याला एकदा लावले तर परिवर्तीत काळाची संख्या

SCERT TELANGANA

$1\frac{1}{2}$ वर्षात 3 आहे म्हणुन $n = 3$

दर $= \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 12000\left(\frac{105}{100}\right)^3$$

$$= 13891.50 \text{ रु.}$$

चक्रवाढ व्याज $= A - P$

$= 13891.50 - 12000$

$= 1891.50$ रु.

उदाहरण:13 यादय्याने त्याच्या कुंटुंबाच्या गरजेसाठी 5120रु. प्रत्येक वर्षाला $12\frac{1}{2}\%$ व्याजाने उसने घेतले. त्याला दोन वर्ष नऊ महिण्याला कर्ज मुक्त करण्यासाठी किती रक्कम भरावी लागेल? आणखी एकुण व्याज किती होईल हे माहित करा ?

सोडवणुक: रेशमाने हा प्रश्न अशा प्रकारे सोडविण्याचा प्रयत्न केला.

तिने पहिले वेळेला वर्षात बदलेले. 2 वर्ष 9 महिणे $= 2\frac{9}{12}$ वर्ष $= 2\frac{3}{4}$ वर्ष

तिने याला माहित असलेल्या सुत्रात मांडण्याचा प्रयत्न केला. $A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^{2\frac{3}{4}}$

आता येथे ती आडकली तिने तिच्या शिक्षकाला विचारले ती कसे माहित करणार ज्याचे घातांक अपुर्णांक आहेत ?

शिक्षकाने तिला सुचना दिली. अगोदर पुर्ण भागाची सुत्र समजुन सरळ व्याज $\frac{3}{4}$ वर्षासाठी माहित करा.

म्हणुन $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^2$$

SCERT TELANGANA

$$= 5120\left(\frac{225}{200}\right)^2$$

$$= 6480 \text{ रु.}$$

उरलेल्या नऊ महिण्यासाठी व्याज $= 6480 \times \frac{25}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{100} = 607.50$ रु.

म्हणुन यादय्याला दोन वर्ष नऊ महिण्यानंतर भरावे लागणार

$= 6480 + 607.50 = 7087.50$ रु.

म्हणुन एकुण चक्रवाढ व्याज $= 7087.50 - 5120 = 1967.50$ रु.

5.11 चक्रवाढ व्याजाचे सुत्राच्या उपयोग करणे.

आपण चक्रवाढ व्याजाचे सुत्र कोठे वापरायचे ? फक्त व्याज मोजण्यासाठीच नाही पंरतु याला बऱ्यासशा वेग वेगळ्या संदर्भात वारतात. जसे उदाहरणार्थ

- लोक संख्या मध्ये वाढ किंवा कमी
- बॉक्टेरीयाची किटकांची वाढ जर वाढीव दर माहित असेल तर
- एका वस्तुची किंमत जर त्याची किंमत वाढते किंवा घटते हे फक्त मधील वर्षात

उदाहरण:14 एका गावाची लोकसंख्या 6250आहे हे आढळुन आले की, लोक संख्येत वाढीव दर 8% प्रत्येक वर्षी आहे. तर दोन वर्षानंतर ची लोकसंख्या माहित करा.

सोडवणुक: येथे $P = 6250$ $R = 8\%$ $T = 2$ वर्ष

दोन वर्षा नंतर लोकसंख्या $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 6250\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 6250\left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 7290$$

उदाहरण:15 एका रबराच्या चेंडुला निश्चित उंचीपासुन खाली फेकले. हे आढळुन आले की फक्त 90% मात्र अगोदरच्या उंची एवढे तो चेंडु पुन्हा उडाला. जर याला 25 मीटर एका इमारतीच्या उंची वरुन उडणार जेव्हा ते जमीनीवर दोन वेळा आदळणार तेव्हा माहित करा.

SCERT TELANGANA

सोडवणुक: पहिल्या वेळेस चेंडु 90% उंच उडणार म्हणुन प्रत्येक वेळी उंचीचा 10% कमी होणार म्हणुन R = -10% घेऊन प्रश्नाला सोडवता येते.

P = 25 m आणि n = 2

जमीनीवर दोन वेळा आदळल्यावर चेंडु किती उंचीवर उडतो.

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 25\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 25\left(\frac{90}{100}\right)^2$$

= 20.25 मिटर

अभ्यास - 5.3

1. सुधाकरने घर सुधारण्यासाठी बॅकेकडुन 15 000 रु. कर्ज घेतले. त्याने प्रत्येक वर्षाला 9% व्याजाने पैसे उसने घेतले. हे पैसे सरळ व्याजाने आठ वर्षासाठी घेतले. तर महिणे वारी त्याला किती हप्ता भरावा लागेतो ?

2. एक टी.वी. 21000रु. ला विकत आणली. एका वर्षानंतर त्याची किंमत 5% ने घटली (घटने म्हणजे वस्तुच्या किंमतीत त्याचा वापर आणि त्याचे आयु मुळे कमी होणे) एका वर्षानंतर टि.वी.ची किंमत किती होणार माहित करा.

3. 8000रु. वर 5% व्याजाच्या दराने प्रत्येक वर्षाला दोन वर्षासाठी रक्कम आणि चक्रवाढ व्याज काय होते.

4. चक्रवाढ व्याजाने 6500 रु. दोन वर्षासाठी 5% व्याजाच्या दराने प्रति वर्ष 6% आणि दुसऱ्या वर्षी किती तर रक्कम आणि चक्रवाढ व्याज माहित करा.

5. प्रतिभाने एका आर्थिक कंपनी कडुन 47000 रु. तिची पहिली कार घेण्यासाठी उसने घेतले. सरळ व्याजाचा दर 17% आणि तिने पाच वर्षासाठी पैसे उसने घेतले. माहित करा.: (a) प्रतिभाने त्या कंपनीला किती पैसे परत करावे लागतील. (b) तिचे महिणेवारी समान हप्ता

6. 2011 वर्षात हैद्राबाद शहराची लोकसंख्या 68,09,000होती. जर ती संख्या प्रत्येक वर्षाला 4.7% दराने वाढते.2015 वर्षाच्या शेवटी लोकसंख्या किती होईल.

SCERT TELANGANA

7. चक्रवाढ व्याज काढा जेव्हा 10000रु. रक्कम एक वर्ष तीन महिने, $8\frac{1}{2}$% प्रत्येक वर्ष व्याजाच्या दराने गुंतविली तर.

8. आरिफ ने एक बॅंकेतुन 80,000 रु. कर्ज घेतले. जर व्याजाचा दर प्रत्येक वर्षी 10% आहे तर रक्कमेतील फरक काढा जर तो $1\frac{1}{2}$ वर्षानि परत भरतो जर व्याजाचा दर (i) वर्षाला चक्रवाढ व्याज (ii) सहा महिण्याला चक्रवाढ व्याजाच्या दराने

9. प्रसाद कडुन 12000रु. 6% प्रत्येक वर्षाला सरळ व्याजाच्या दराने दोन वर्षासाठी घेतले. मी ती रक्कम चक्रवाढ व्याजानी घेतली होती का? मला किती अधिक रक्कम भरावी लागणार?

10. एका प्रयोग शाळेत बॅक्टेरीयाची मोजनी एक प्रयोग करीत असतांना प्रत्येक तासाला 2.5% दराने प्रत तास वाढत होते. दोन तासांच्या शेवटी बॅक्टेरियांची संख्या किती जर सुरुवातीला ती मोजनी 5,06,000 होती.

11. कमलाने 26400 रु. एका बॅंकेकडुन 15% व्याजाच्या दराने प्रत्येक वर्षी चक्रवाढ व्याजाने उसने घेतले. दोन वर्ष चार महिण्यात कर्ज मुक्त करण्यासाठी तिला किती रक्कम भरावी लागेल ?

12. भारतीने 12500 रु.12% प्रत्येक वर्षी व्याजाच्या दराने तीन वर्षासाठी सरळ व्याजाने कर्ज घेतले. आणि माधुरीने तेवढीच रक्कम 10% चक्रवाढ व्याजाने घेतली. कोण जास्त रक्कम भरेल आणि किती?

13. एका मिशनरीची किंमत 10000रु.ला 5%.दराने कमी कले तर एक वर्षानंतर त्याची किंमत किती होते.

14.. एका शहराची लोकसंख्या दोन वर्षानंतरची किती होईल जर ती आता 12 लाख आहे. जर 4% दराने वाढ होत आहे.

15. 1000 रु. ला एक वर्षासाठी 10% व्याजाच्या दराने प्रत्येक वर्षी चक्रवाढ व्याज किती होईल. जर चक्रवाढ व्याज तिन महिण्यात एकदा लावले तर किती होईल ?

SCERT TELANGANA

आपण काय चर्चा केली आहे.

1. दोन साधारण गुणोत्तराला एकाच गुणोत्तरात दर्शविले जाते. ते म्हणजे antecedents consequents चा गुणाकार आहे. त्याला आपण संयुक्त गुणोत्तर म्हणतो. जर a:b आणि c:d हे साधारण गुणोत्तर असतील तर त्याचे संयुक्त गुणोत्तर $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ म्हणजेच ac:bd.

2. शेकडा (%) म्हणजे एखादी संख्या 100सोबत तुलना करणे. शेकडा शब्दाचा अर्थ प्रत्येक शंभराला एक किंवा प्रत्येक शंभरापैकी एक $100\% = \frac{100}{100}$ हे अपुर्णांक छेद 100 असलेली अपुर्णांक संख्या होय.

3. सुट म्हणजे छापील किंमतीवर घटने होय. किंमतीत कमी होने म्हणजेच सुट आहे. हे छापील किंमतीवर काढले जाते.

4. नफा किंवा तोटा नेहमी खरेदी किंमतीवर काढला जातो. नफा म्हणजे खरेदी किंमतीवर वाढीचे उदाहरण आहे. आणि खरेदी किंमतीवर घटण्याचे उदाहरण आहे.

5. एका वस्तुचे विक्री किंमतीवर VAT घेतले जाते. आणि हे पावती मध्ये मिळविले जाते.

   VAT म्हणजे विक्री किंमतीत शेकडा वाढ आहे.

6. सरळ व्याज म्हणजे मुद्दलवर शेकडा वाढ आहे.

7. सरळ व्याज (1) $= \frac{P \times T \times R}{100}$ जेथे P = मुद्दल T = काळ वर्षामध्ये R = व्याजाचे दर

8. रक्कम = मुद्दल + व्याज = $P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$

9. चक्रवाढ व्याज तुम्हाला व्याजावर व्याज कमविण्याची संधी देते.

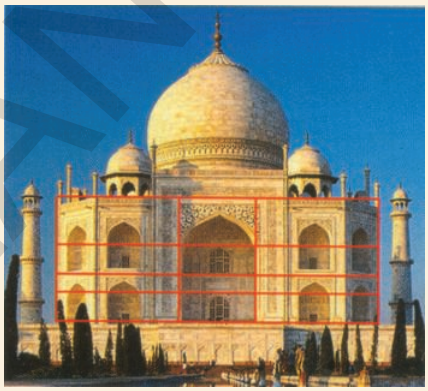
10. 'n' वर्षाच्या शेवटी चक्रवाढ व्याज वापरुन रक्कम $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$

11. तो काळ ज्याच्या नंतर मुद्दल रक्कमेत व्याज मिळविले जाते. त्याला परिवर्तीत काळ म्हणतात. जेव्हा चक्रवाढ व्याज सहा महिण्याला घेतले तर तेव्हा वर्षातुन दोन वेळा परिवर्तीत काळ येतात. प्रत्येकी सहा महिण्यानंतर येते. अशा संदर्भात वर्षाचा आर्धा व्याजाचा दर लागतो.

SCERT TELANGANA

तुम्हाला माहित आहे का ?

पुरातन ग्रीस देशात कलाकार आणि चित्रकारांचा विश्वास होतो की, एक निश्चित आयताकृती आकार होता जो डोळ्यांना पाहण्यास आंनद वाटत होता. आयताकृतीच्या या आकाराला त्याच्या लांबीची बाजु आणि लहान बाजुचे जवळ जवळ गुणोत्तर 1.615:1. हे गुणोत्तर एका सुवर्ण गुणोत्तराच्या जवळ आहे. पॉरथेनान ग्रीस देशातील एक प्रसिध्द मंदीर संपुर्ण संगमरमर दगडाने बनविले आहे. सुवर्ण गुणोत्तराच्या अनुसार हे पुर्ण मंदीर इ.स. 5 व्या शतका मध्ये बनविले आहे. भारत देशात असलेले ताज महल देखील सुवर्ण गुणोत्तराचे उत्तम उदाहरण आहे.



समान गुणोत्तराचे बेरीज

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+.....+\frac{100}{200}$ ची बेरीज काढा.

आपण याला या पध्दतीने बेरीज करता येते का?

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+.....+\frac{100}{200} = \frac{1+2+3+4+.....+100}{2+4+6+8+.....+200}$$

$$= \frac{5050}{2\times 5050} = \frac{1}{2}$$

जर $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_3}{q_3}=.....=\frac{p_n}{q_n}$

नंतर $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}+.....+\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1+p_2+p_3+....+p_n}{q_1+q_2+q_3+.....+q_n}=\frac{p_1}{q_1}$

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ iff $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $\quad (b,d>0)$

$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ iff $\frac{1+2}{2}=\frac{3+6}{6}$

$\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ पुन्हा या अशाप्रकारे लिहता येते. $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$.....

SCERT TELANGANA

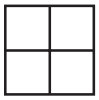
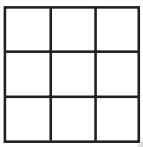
धडा 6

वर्गमुळ आणि घनमुळ

6.0 प्रस्तावना

एकक चौरस म्हणजे असा चौरस ज्याची बाजु एक एकक असते

एकक चौरसांचा वापर करुन चौरस तयार करु या.

क्र.सं.	आकृत्या	बाजुची लांबी एकका मध्ये	वापरलेल्या एकक चौरस संख्या
1		1	1
2		2	4
3		3	9

याच प्रमाणे समोरचे दोन चौरस तयार करा.

6 एकक बाजु असलेले चौरस तयार करण्यासाठी किती एकक चौरसाची आवश्यकता आहे याचा अंदाज तुम्ही करु शकता का ?

वरील निरिक्षणा वरुन 1,4,9,16,25..... एकक चौरसाने आपण चौरसाचा आकार तयार करु शकतो

1,4,9,16,25..... या संख्यांना खालील प्रकारे दर्शवु शकतो.

$1 = 1 \times 1 = 1^2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$16 = 4 \times 4 = 4^2$

$25 =$ ..... $\times$ ..... $=$ .....

$36 =$ ..... $\times$ ..... $=$ .....

.....

.....

$m = n \times n = n^2$ येथें m आणि n पुर्णांक आहेत

प्रत्येक संदर्भात अवयाच्या नमुन्याचे निरिक्षण करा.

SCERT TELANGANA

दिलेल्या नमुन्यात तुम्ही निरिक्षण केलेच असेल की दोन समान अवयाच्या गुणाकाराच्या रुपात संख्याना लिहु शकतो. अशा संख्याना पुर्ण वर्ग म्हटल्या जाते.

उदा: (i) $9 = 3 \times 3$ (v) $\frac{9}{16} = \frac{3}{4} x \frac{3}{4}$

(ii) $49 = 7 \times 7$ (vi) $\frac{4}{12.25} = \frac{2}{3.5} x \frac{2}{3.5}$

(iii) $1.44 = 1.2 \times 1.2$ (iv) $2.25 = 1.5 \times 1.5$

संदर्भ (i) आणि (ii) मध्ये आपल्याला असे लक्षात येते की, 9 आणि 49 हे पुर्ण वर्गसंख्या पुर्णांक आहेत. अशा पुर्ण वर्ग संख्येचे सामान्यरुप $m = n \times n$ आहे.(जेथे m आणि n पुर्णांक आहेत.) संदर्भ (iii)आणि(iv) मध्ये पुर्णवर्ग संख्या पुर्णांक नाहीत. म्हणुन त्यांना वर्गसंख्या म्हणत नाहीत. साधारण पणे 'm' पुर्णांकाला n^2 म्हणुन दर्शवु शकतो.जेथे 'n' हे एक पुर्णांक आहे आणि 'm' ही वर्ग संख्या आहे.किंवा m हा 'n' चा वर्ग आहे.

पुर्ण वर्ग: एक परिमेय संख्या दुसऱ्या एका परिमेय संख्येच्या वर्गाच्या समान असते.

वर्ग संख्या : एक पुर्णांक संख्या दुसऱ्या एका पुर्णांक संख्येच्या वर्गाच्या समान असते.

"सर्व वर्ग संख्या हे पुर्ण वर्ग असतात." परंतु सर्व पुर्ण वर्ग, वर्ग संख्या असु शकत नाही.

उदा: 2.25 हे पुर्ण वर्ग संख्या आहे कारण याला $2.25 = (1.5)^2 = 1.5 \times 1.5$ म्हणुन दर्शवु शकतो. हे पुर्णांकाचा वर्ग नाही आहे म्हणुन हे वर्ग संख्या नाही आहे.

42 वर्ग संख्या आहे का ?

$6^2 = 36$ आणि $7^2 = 49$, हे आपल्याला माहित आहे. जर 42 ही वर्ग संख्या असेल तर ते एका पुर्णांकाचे वर्ग असलेले असते पण ते 6 आणि 7 च्या मध्ये आहे. पण 6 आणि 7 च्या मध्ये कोणताही पुर्णांक नाही आहे.
म्हणुन 42 ही वर्ग संख्या नाही आहे. खालील तक्त्यात पुर्ण वर्गाचे निरिक्षण करा.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

तक्त्यामध्ये दाखविलेल्या व्यतीरिक्त अजुन कोणती तरी वर्ग संख्या आहे का हे माहित करा.

SCERT TELANGANA

हे करा:

1. च्या मधील पुर्ण वर्ग माहित करा. (i) 100 आणि 150 (ii) 150 वर्ग 200
2. 56 हे पुर्ण वर्ग आहे का ? कारणे द्या.?

6.1 वर्ग संख्याचे गुणधर्म :

निरिक्षण करुन खालील तक्ता पुर्ण करा.

संख्या	वर्ग
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	.....
7	49
8	64
.....	81
10	100

संख्या	वर्ग
11	121
12	144
13	.....
14	196
15	225
16	.....
17	289
18	324
19	361
20	400

संख्या	वर्ग
21	441
22	.....
23	529
.....	576
25	625

वरील तक्त्यात वर्ग संख्याचे एकम स्थानातील अंकाचे निरिक्षण करा या सर्व संख्यांच्या एकम स्थानी 0, 1, 4, 5, 6 , 9 आहे. तुम्ही निरिक्षण केले का. या मध्ये कोणत्याही संख्याच्या एकम स्थानी 2, 3, 7 किंवा 8 नाही आहे. ज्या संख्याच्या एकम स्थानी 2, 3, 7 किंवा 8 असेल त्या संख्या पुर्ण वर्ग नसतात. एकम स्थानी 0, 1, 4, 5, 6 किंवा 9 असलेल्या सर्व संख्या वर्ग संख्या असतात म्हणुन आपण म्हणु शकतो का ? या बाबतीत विचार करा.

प्रयत्न करा.

1. खालील संख्या पुर्ण वर्ग आहेत का ? अंदाज करा आणि त्या साठी कारण द्या आणि वरील तक्त्या वरुन पडताळा करा.
   (i) 84 (ii) 108 (iii) 271 (iv) 240 (v) 529

1, 9, 11, 19, 21 चे वर्ग लिहा.

संख्याच्या एकम स्थानचा अंक व त्याचा वर्ग यामध्ये काही संबंध असल्याचा तुमच्या लक्षात आले काय? जर संख्याच्या 1 किंवा 9 असेल तर त्याच्या वर्ग संख्याना एकम स्थानी फक्त 1 असतो. लक्षात येते.

या प्रमाणे0,2,3,5,7 आणि 8 एकमस्थानी असलेल्या संख्याच्या वर्गाच्या एकमस्थानी काय असु शकतो ?

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करा :

1. खालील मध्ये एकमस्थानी एक असलेले कोणते आहे.?

   (i) 126^2 (ii) 179^2 (iii) 281^2 (iv) 363^2

2. खालील मध्ये एकमस्थानी 6 असलेले कोणते आहे.?

   (i) 116^2 (ii) 228^2 (iii) 324^2 (iv) 363^2

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा:

वैशाली म्हणत आहे की सम संख्येचा वर्ग सम संख्या असते आणि विषम संख्येचा वर्ग विषम संख्या असते ? तुम्ही तिचे म्हणणे मान्य करता का ?

निरिक्षण करुन तक्ता पुर्ण करा:

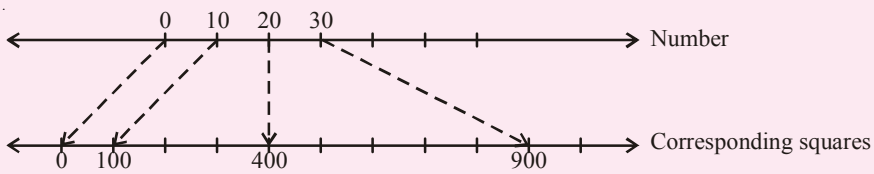
संख्या	वर्ग संख्येत असलेले अंकांची संख्या	
	(किमान)	(कमाल)
1-9	1	2
10-99	.....	4
100-999	5	.....
1009-9999	7	8
n अंक	.....	.....

प्रयत्न करा:

1. खालील संख्येचा वर्ग संख्येत किती अंक असेल ? अंदाज करा.

   (i) 72 (ii) 103 (iii) 1000

2.



20 आणि 30 च्या मध्ये 27 आहे.
20^2 आणि 30^2 च्या मध्ये 27^2 आहे.

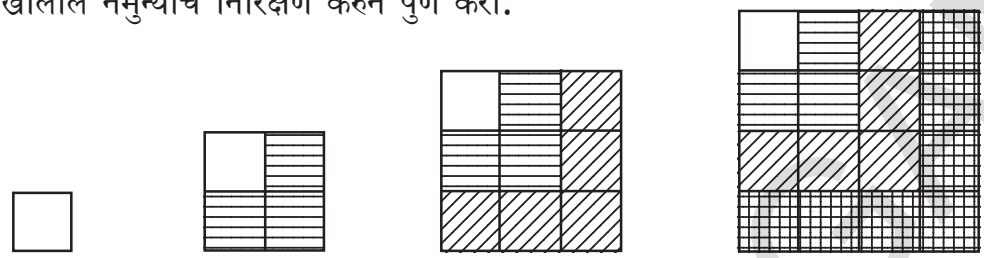
खालील पुर्ण वर्गातुन 27^2 कोणता असेल ते माहित करा.

(i) 329 (ii) 525 (iii) 529 (iv) 729

SCERT TELANGANA

6.2. चौरसामधील मनोरंजक नमुने :

1. खालील नमुन्याचे निरिक्षण करुन पुर्ण करा.



$1 = 1^2$ $\quad$ $1+3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ $\quad$ $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \ldots\ldots\ldots = (\ )^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \ldots\ldots\ldots = (\ )^2$

या वरुन, पहिल्या 'n' विषम संख्याची बेरीज ही 'n^2' एवढी असते असे आपण सामन्यीकरण करु शकतो.

2.1 खालील नमुन्याचे निरिक्षण करा आणि त्यातील सुटलेली संख्या लिहा.

$(11)^2 = 121$

$(101)^2 = 10201$

$(1001)^2 = 1002001$

$(10001)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1000001)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.2 नमुन्याचे निरिक्षण करा आणि ते पुर्ण करा.

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$111111^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

या संख्यांना पालीनड्रोम संख्या म्हणतात.

एखाद्याला समोरुन आणि मागुन वाचल्या नंतर तेच सारखे शब्द, तिच सारखी संख्या किंवा तेच वाक्य येत असेल तर त्याला पालीनड्रोम म्हणतात
उदा. NOON, MALAYALAM
Rats live on no evil star.
15651

SCERT TELANGANA

3. खालच्या नमुन्यात सुटलेल्या संख्या लिहा.

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + (\ )^2 = 21^2$

$5^2 + (\ )^2 + 30^2 = (\ )^2$

$6^2 + 7^2 + (\ )^2 = (\ )^2$

वर्गाच्या बेरजेचे निरिक्षण करणे.

वर्गाच्या पाया (मुळ) मध्ये तुम्हाला काही संबंध आढळते का ?

पहिल्या आणि दुसऱ्या वर्ग संख्येच्या पाया सोबत तिसऱ्या वर्ग संख्येच्या पायाचे संबंध कसे आहे. ?

शेवटच्या सर्व संख्यांची पायाशी तिसऱ्या वर्ग संख्याचा पाया सोबत कसे संबंध आहे. ?

4. दिलेल्या नमुन्याचा वापर करुन सुटलेले संख्या माहित करा.

$3^2 = 9 = 4 + 5$ $\left(\frac{3^2-1}{2} + \frac{3^2+1}{2}\right)$

$5^2 = 25 = 12 + 13$ $\left(\frac{5^2-1}{2} + \frac{5^2+1}{2}\right)$

$7^2 = 49 = 24 + 25$ $(\quad + \quad)$

$11^2 = 121 = \ldots\ldots + \ldots\ldots$ $\left(\frac{11^2-1}{2} + \frac{11^2+1}{2}\right)$

$15^2 = 225 = \ldots\ldots + \ldots\ldots$ $(\quad + \quad)$

या वरुन, आपण असा निष्कर्ष काढु शकतो कि, कोणत्याही विषम संख्येचा वर्ग n ला क्रमाने येणाऱ्या दोन संख्येच्या बेरजेच्या रुपात दाखवु शकतो जसे $\left(\frac{n^2-1}{2} + \frac{n^2+1}{2}\right)$

5. लागोपाठ येणाऱ्या वर्ग संख्या च्या मधील संख्या खालील तक्त्याचे निरिक्षण करुन पुर्ण करा.

लागोपाठच्या संख्या	लागोपाठ येणाऱ्या वर्ग संख्याच्या संख्या	मधील संबंध
$1^2 = 1;\ 2^2 = 4$	2, 3 (1आणि 4 च्यामधात 2 संख्या आहे)	2×पहिल्या संख्येचा पाया 1, (2×1=2)
$2^2 = 4;\ 3^2 = 9$	5, 6, 7, 8 (4 आणि 9 च्यामधात 4 संख्या आहेत.)	2×पहिल्या संख्येचा पाया 2, (2×2=4)
$3^2 = 9;\ 4^2 = 16$	10,11,12,13,14,15 (9 आणि 16 च्या मधात 6 संख्या आहेत.)	2×पहिल्या संख्येचा पाया 3 (2×3=6)
$4^2 = 16;\ 5^2 = 25$	.....	2×पहिल्या संख्येचा पाया 4, (2×4=8)
$5^2 = 25;\ 6^2 = 36$	.....	.....
.....	.....	.....

SCERT TELANGANA

वरील तक्त्या वरुन लागोपाठ येणाऱ्या वर्ग संख्या आणि संख्या मधील काही संबंध तुमच्या लक्षात आले का?

वरील तक्त्याची मदत घेऊन n^2 आणि $(n+1)^2$ या मधील वर्ग संख्या नसलेल्या संख्या माहित करण्याचा प्रयत्न करा. n^2 आणि $(n+1)^2$ च्या मधात वर्ग संख्या नसलेल्या संख्या '2n' आहेत

हे करा:

1. 9^2 आणि 10^2 च्या मध्ये किती पुर्ण वर्ग नसलेले संख्या आहेत. ?
2. 15^2 आणि 16^2 च्या मध्ये किती पुर्ण वर्ग नसलेले संख्या आहेत. ?

प्रयत्न करा:

रेहान म्हणाला की, 9^2 आणि 11^2 च्या मधात वर्ग संख्या नसलेले 37 संख्या आहेत. हे बरोबर आहे का ? कारण सांगा.

अभ्यास - 6.1

1. खालील संख्येच्या वर्गामध्ये एकम स्थानी कोणता अंक असेल ?

   (i) 39 (ii) 297 (iii) 5125 (iv) 7286 (v) 8742

2. खालील पैकी कोणते पुर्ण वर्ग आहेत.?

   (i) 121 (ii) 136 (iii) 256 (iv) 321 (v) 600

3. खालील संख्या पुर्ण वर्ग नाही आहेत. कारण सांगा ?

   (i) 257 (ii) 4592 (iii) 2433 (iv) 5050 (v) 6098

4. खालील संख्यांचे वर्ग सम आहेत की विषम आहेत ते माहित करा.?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 8204 (iv) 17779 (v) 99998

5. खालील संख्याच्या वर्गाच्या मध्ये किती संख्या येत आहेत सांगा.

   (i) 25; 26 (ii) 56; 57 (iii) 107;108

6. खालील ची बेरीज न करता उत्तर माहित करा.

   (i) $1+3+5+7+9=$

   (ii) $1+3+5+7+9+11+13+15+17=$

   (iii) $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25=$

SCERT TELANGANA

6.3 पायथागोरन त्रिकुट :

खालील संख्या पहा.

(i) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(ii) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

पायथागोरन त्रिकुट साठी (3, 4, 5) आणि (5, 12, 13) हे काही उदाहरणे आहेत.

साधारणपणे a, b, c हे धन पुर्णांक असतात. जर $a^2 + b^2 = c^2$ तर a, b, c हे पायथागोरन त्रिकुट असतात.

a,b,c ला जर 1 च्या व्यतीरिक्त सामाईक अवयव नसेल तर (a,b,c) त्रिकुट ला मुळ त्रिकुट म्हणतात.

हे करा

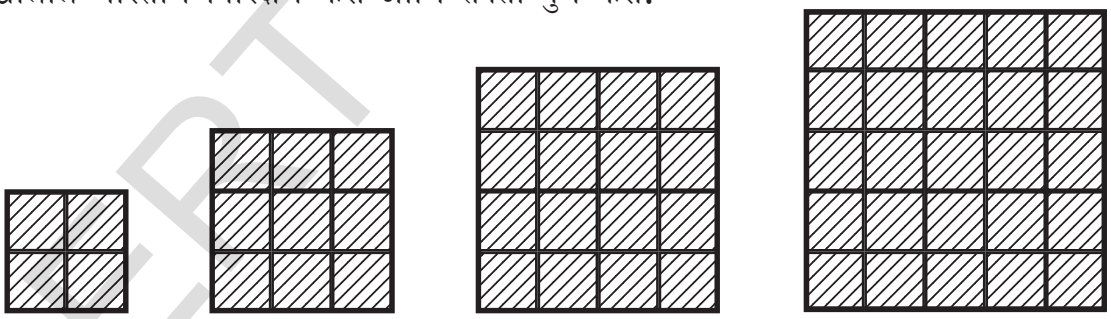
1. खालील संख्या पायथागोरन त्रिकुट आहेत का तपासणी करा.

   (i) 2, 3, 4 (ii) 6, 8, 10 (iii) 9, 10, 11 (iv) 8, 15, 17

2. पायथागोरन त्रिकुट घ्या. त्यांचे गणुक लिहा. हे गुणक पायथागोरन त्रिकुट मधले आहेत का तपासणी करा.

6.4 वर्गमुळ

खालील चौरसाचे निरिक्षण करा आणि तक्ता पुर्ण करा.



A = 4 A = 9 A = 16 A = 25

चौरसाचे क्षेत्रफळ (सें.मी^{2}मध्ये)	चौरसाची बाजु (सें.मी.मध्ये)
$4 = 2 \times 2$	2
$9 = 3 \times 3$	3
$16 = 4 \times 4$	_____
$25 = 5 \times 5$	_____

ओळ/स्तंभ मधील एकक चौरसाची संख्या ही त्या चौरसाची बाजु दर्शविते.

SCERT TELANGANA

चौरसाचे क्षेत्रफळ आणि त्यांच्या बाजु मध्ये तुम्ही काही संबंध माहित केले का?

आपल्याला माहीत आहे चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजु × बाजु = बाजु^{2}

जर चौरसाचे क्षेत्रफळ 169 से.मी.^{2} तर चौरसाची बाजु काय असेल ?

बाजुची लांबी 'x' सें.मी. गृहीत धरु या.

$\Rightarrow 169 = x^2$

बाजुची लांबी माहित करण्यासाठी अशी संख्या माहित करणे आवश्यक आहे की ज्याचा वर्ग 169 आहे.

आपल्याला माहित आहे $169 = 13^2$. म्हणुन बाजुची लांबी = 13 सें.मी.

म्हणुन जर, एखाद्या वर्ग संख्येला दोन समान अवयवाच्या गुणाकारा मध्ये दर्शवत असेत तर त्या अवयवाला त्या वर्ग संख्येचा वर्गमुळ म्हटल्या जाते. याप्रकारे हे वर्गाची व्यस्त क्रिया आहे.

उदाहरण 1: $3^2 = 9$ म्हणुन 9 चे वर्गमुळ 3 आहे.

$4^2 = 16$ म्हणुन 16 चे वर्गमुळ 4 आहे.

$5^2 = 25$ म्हणुन 25 चे वर्गमुळ 5 आहे.

जर $y^2 = x$ तर x चे वर्गमुळ y आहे. $(\sqrt{x} = y)$

उदाहरण 2:

1. $\sqrt{4} = 2$ कारण $2^2 = 4$
2. $\sqrt{16} = 4$ कारण $4^2 = 16$
3. $\sqrt{225} = 15$ कारण $15^2 = 225$ इत्यादी.

5 आणि –5या दोन्हीचा वर्ग 25 आहे.
म्हणुन 25 चा वर्गमुळ 5 किंवा –5.
पण या धड्यात आपण फक्त धन वर्गमुळ घेणार आहोत. यालाच मुख्य वर्गमुळ म्हणतात. अशा प्रकारे लिहिल्या जाते.

$\therefore \sqrt{25} = 5.$

खालील तक्ता पुर्ण करा.

वर्ग	वर्गमुळ
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25}$ = ...
$6^2 = 36$	$\sqrt{36}$ = ...
7^2 = ...	$\sqrt{\quad}$ = ...
8^2 = ...	$\sqrt{\quad}$ = ...
9^2 = ...	$\sqrt{\quad}$ = ...
10^2 = ...	$\sqrt{\quad}$ = ...

SCERT TELANGANA

6.5 लागोपाठ येणाऱ्या विषम संख्येचा वजाबाकी व्दारा वर्गमुळ माहित करणे.:

प्रत्येक वर्ग संख्येला 1 पासुन सुरुवात होणाऱ्या लागोपाठ विषम संख्येच्या बेरजेच्या रुपात दर्शवु शकतो. हे आपल्याला माहित आहे.

समजा, $1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

या नमुन्याची उलट क्रम केल्याने वर्गमुळ माहित होते.

उदा. माहित करा. $\sqrt{49}$

पायरी 1 $49 - 1 = 48$ (पहिली विषम संख्या वजा करुन)

पायरी 2 $48 - 3 = 45$ (दुसरी विषम संख्या वजा करुन)

पायरी 3 $45 - 5 = 40$ (तिसरी विषम संख्या वजा करुन)

पायरी 4 $40 - 7 = 33$

पायरी 5 $33 - 9 = 24$

पायरी 6 $24 - 11 = 13$

पायरी 7 $13 - 13 = 0$

निरिक्षणाने आपल्याला माहित होते

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2 = 49$

$49 - [1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13] = 0$

49 हे पुर्ण वर्ग आहे.

49 मधुन आपण 1 पासुन लागोपाठ येणाऱ्या सात विषम संख्या वजा केलेले आहोत आणि आपल्याला 7 व्या पायरीवर शुन्य मिळालेले आहे.

$\therefore \sqrt{49} = 7$

सुचना : जर या प्रक्रिये मध्ये शेवटला शुन्य येत नसेल तर दिलेली संख्या ही पुर्ण वर्ग होत नाही.

हे करा.

(i) क्रमवार विषम संख्याच्या वजाबाकी व्दारे खालील संख्या पुर्ण वर्ग आहेत का नाहीत ते माहित करा.?

(i) 55 (ii) 90 (iii) 121

वरील वजाबाकी व्दारा एखाद्या वर्ग संख्येचा वर्गमुळ माहित करणे सोपे आहे. पण 625,729..... या सारख्या मोठ्या संख्यासाठी ही पध्दत वेळ घेणारी आहे. म्हणुन आपण सोप्या पध्दतीने वर्गमुळ काढण्याचा प्रयत्न करु या.

SCERT TELANGANA

दिलेल्या संख्येचा वर्गमुळ काढण्यासाठी दोन पध्दती आहेत ते ..

(i) मुळ अवयव काढुन

(ii) भागाकार पध्दत

6.6 मुळ अवयव काढुन वर्गमुळ माहित करणे.

2	484
2	242
11	121
11	11
	1

484 चा वर्गमुळ मुळ अवयव काढण्याचा पध्दती व्दारे माहित करु या,

पायरी 1: 484 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकारा मध्ये लिहा.

$484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$

पायरी 2: सारख्या अवयवाच्या जोड्या तयार करा.

$484 = (2 \times 2) \times (11 \times 11)$

पायरी 3: प्रत्येक जोडी मधुन एक अवयव घेत जावा.

$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$

म्हणुन 484 चा वर्गमुळ 22 आहे.

$484 = (2 \times 11) \times (2 \times 11) = (2 \times 11)^2$

$\sqrt{484} = \sqrt{(2 \times 11)^2}$

$= 2 \times 11$

$= 22$

आता, आपण आणखी काही उदाहरणे पाहु.

उदाहरण 3 : मुळ अवयव काढुन 1296 चा वर्गमुळ माहित करा.

सोडवणुक : 1296 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकारा मध्ये लिहा.

$1296 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$

$\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$\therefore \sqrt{1296} = 36$

2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

उदाहरण 4 : 1764 चे वर्गमुळ माहित करा.

सोडवुणक : 1764 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकार मध्ये लिहा.

$1764 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (7 \times 7)$

$\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7$

$\therefore \sqrt{1764} = 42$

2	1764
2	882
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

SCERT TELANGANA

उदाहरण 5: 720 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने गुणले असता पुर्ण वर्ग मिळते.

सोडवणुक : 720 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकारामध्ये लिहा.

$720 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$

2,2,3 हे जोड्या मध्ये आहेत हे आपल्याला दिसत आहे.

पण, 5 हा एकटा आहे. म्हणुन दिलेल्या संख्येला 5 ने गुणले तर

आपल्याला पुर्ण वर्ग मिळते.

पुर्ण वर्ग $720 \times 5 = 3600$

2	720
2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

उदाहरण 6: 6000 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने भागले असता पुर्ण वर्ग मिळते. आणि तसेच त्या मिळालेल्या संख्येचे वर्गमुळ माहित करा.

सोडवणुक : 6000 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकारा मध्ये लिहा.

$6000 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{5 \times 5} \times 5$

2,2 आणि 5 जोड्या मध्ये आहेत आणि 3 आणि 5 जोड्या मध्ये नाही. हे आपल्याला दिसत आहे. म्हणुन दिलेल्या संख्येला

$3 \times 5 = 15$ ने भागले तर

मिळालेली पुर्ण वर्ग $= 6000 \div 15 = 400$

$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

400 चे वर्गमुळ

$\sqrt{400} = \sqrt{(2\times2)\times(2\times2)\times(5\times5)}$

$= 2 \times 2 \times 5$

$= 20$

2	6000
2	3000
2	1500
2	750
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

अभ्यास - 6.2

1. मुळ अवयव काढण्याच्या पध्दती व्दारा खालील संख्यांचे वर्गमुळ माहित करा.

(i) 441 (ii) 784 (iii) 4096 (iv) 7056

SCERT TELANGANA

2. 3645 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने गुणले असता पुर्ण वर्ग मिळते. ?
3. 2400 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने गुणले असता पुर्ण वर्ग मिळते. आणि तसेच त्या मिळालेल्या संख्येचा वर्गमुळ माहित करा.
4. 7776 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने भागले असता पुर्ण वर्ग मिळते
5. बगीच्यात 1521 झाडे अशी लावलीत की, एका रांगेत जेवढी झाडे लावली तेवढी त्या बगीच्यात रांगे आहेत तर रांगेची संख्या माहित करा आणि प्रत्येक रांगेत लावलेल्या झाडांची संख्या माहित करा.
6. एका शाळेने विद्यार्थ्यांकडुन 2601 रुपये फी म्हणुन गोळा केले. जर विद्यार्थ्यांनी दिलेली फि आणि शाळेतीलज विद्यार्थ्यांची संख्या समान असेल तर शाळेत एकुण विद्यार्थी किती आहेत ?
7. दोन संख्याचा गुणाकार 1296 आहे. जर एक संख्या दुसऱ्या संख्याच्या 16 पट आहे. तर त्या दोन्ही संख्या माहित करा. ?
8. 7921 सैनिक एका सभागृहात असे बसले की, जेवढ्या रांगा त्या सभागृहात आहेत तेवढ्या संख्येने सैनिक एका रांगेत बसले. तर सभागृहात किती रांगा आहेत. ?
9. चौरसाकार शेतीचे क्षेत्रफळ 5184 मी^{2}. आहे. अशा आयताकार शेतीचे क्षेत्रफळ माहित करा ज्याची परिमीती चौरसाकार शेतीच्या परिमीती एवढे आहे. आणि त्या आयताची लांबी त्यांच्या रुंदीच्या दुप्पट आहे.

6.7 भागाकार पध्दतीने वर्गमुळ माहित करणे :

मुळ अवयव काढण्याच्या पद्धतीने वर्गमुळ कसे माहित करावे या विषयी आपण अगोदरच चर्चा केलेली आहे. मोठ्या संख्या साठी ते खुप लांब आणि अवघड आहे. म्हणुन या वर उपाय म्हणुन आपण भागाकार पध्दतीचा वापर करु.

$|\overline{784}|$

भागाकार पध्दतीने 784 चा वर्गमुळ माहित करु या.

$2\,|\,\overline{784}\,|\,2$

पायरी 1 : दिलेल्या संख्याच्या अंकाची जोडी बनवा. एकम स्थनापासुन डावीकडे जावा. प्रत्येक जोडीवर रेषा काढा.

$2\,|\,\overline{784}\,|\,2$
$\quad\;\; 4$
$\quad\;\; 3$

पायरी 2 : अशी मोठ्यातील मोठी संख्या माहित करा ज्याचा वर्ग, डावीकडुन असलेला एक अंक संख्या किंवा जोडीच्या संख्या एवढी किंवा त्यांच्या पेक्षा कमी असायला पाहिजे (म्हणजे 2) या संख्येला भाजक आणि भागाकार म्हणुन घ्या.

$2\,|\,\overline{784}\,|\,2$
$\quad -4$
$\quad 384$

पायरी 3 : पहिली जोडी संख्या किंवा एक अंकी संख्या मधुन भाजक आणि भागाकार या संख्याचा गुणाकारा $(2 \times 2 = 4)$ त्यामुधन वजा करेण (म्हणजेच $7 - 4 = 3$)

पायरी 4 : दुसरी जोडी (म्हणजेच 84) ला बाकीच्या (म्हणजेच 3)उजव्या बाजुला ठेवा. हा नविन भाज्य आहे (म्हणजेच 384).

$2\,|\,\overline{784}\,|\,2$
$\quad -4$
$4\square\,|\,384$

पायरी 5 : समोरच्या शक्य असलेल्या भाजकामध्ये भागाकाराला दुप्पट करा (म्हणजेच $2 \times 2 = 4$) आणि त्याला उजव्या बाजुला एक चौकट लिहा.

SCERT TELANGANA

2	$7\overline{84}$	28
	−4	
4$\boxed{8}$	384	
	384	
	0	

पायरी 6 : त्या चौकटीमध्ये एक मोठ्यातली मोठा अंक अंदाज करा आणि भाजका मध्ये तयार झालेल्या नविन संख्यांला जर अंदाज केलेल्या अंकाने गुणाकार केला तर आलेले उत्तर हे नविन भाज्या पेक्षा कमी किंवा त्या बरोबर असायला पाहिजे (म्हणजेच $48 \times 8 = 384$).

2	$7\overline{84}$	28
	−4	
48	384	
	−384	
	0	

पायरी 7 : वजाबाकी केल्यानंतर आपल्याला बाकी शुन्य मिळते. भागाकार 28 आहे हे 784 चे वर्गमुळ आहे.

$\therefore \sqrt{784} = 28$

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

खालील भागाकाराचे निरिक्षण करा. वरील उदाहरणात भाजक $\boxed{}48$ मध्ये 8 का घेतले ? त्याचे कारण द्या.

4) 384 (9	4) 384 (8	4) 384 (7
36	32	28
24	64	104
81 $= 9^2$	64 $= 8^2$	49 $= 7^2$

आता, आपण, आणखी काही उदाहरणे पाहु.

उदाहरण 1: 1296 चा वर्गमुळ माहित करा.

सोडवणुक: पायरी 1

$|\overline{12}\,\overline{96}|$

पायरी 2

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	3
	9	

पायरी 3

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	3
	-9	

पायरी 4

3	$\overline{1296}$	3
	-9	
6	396	

पायरी 5

3	$\overline{12}\,\overline{96}$	36
	-9	
66	396	
	- 396	
	0	

a	$a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$
a	a^2	
$2a + b$	$2ab + b^2$	$b(2a + b) = 2ab + b^2$
	$2ab + b^2$	
	0	

निरिक्षण करा

6) 396 (6
36
36
36 $= 6^2$
0

$\therefore \sqrt{1296} = 36$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 2: 8281 चे वर्गमुळ माहित करा.

सोडवणुक:

9	$\overline{82}\ \overline{81}$	91
	-81	
181	181	
	-181	
	0	

निरिक्षण करा.

18) 181 (1
18
1
1 $= 1^2$
0

म्हणुन $\sqrt{8281} = 91$

उदाहरण 3: सर्वात मोठी चार अंकी संख्या माहित करा जे की पुर्ण वर्ग आहे.

सोडवणुक: सर्वात मोठी चार अंकी संख्या 9999 आहे.

आपण 9999 चे वर्गमुळ भागाकार पध्दतीने माहित करु.

9	$\overline{99}\ \overline{99}$	99
	-81	
189	18 99	
	-17 01	
	1 98	

198 बाकी हे दर्शविते की 9999 पेक्षा 198 ने कमी असलेली संख्या पुर्णवर्ग होते. याचा अर्थ जर आपण 9999 मधुन 198 वजा केले तर आपल्याला पुर्ण वर्ग मिळते.

$\therefore$ 9999 – 198 = 9801 हे अपेक्षीत पुर्ण वर्ग आहे.

उदाहरण 4: 4215 मधुन कोणती लहानतली लहान संख्या वजा केली तर ती पुर्ण वर्ग होते.?

सोडवणुक: आपण भागाकार पध्दतीने माहित करु.
बाकी 119 आहे.

6	$\overline{42}\ \overline{15}$	64
	-36	
1	6 15	
124	-4 96	
	1 19	

याचा अर्थ जर आपण 4215 मधुन 119 वजा केलो तर आपल्याला पुर्ण वर्ग मिळते. अपेक्षीत लहान संख्या 119 आहे.

6.8 भागाकार पध्दतीचा उपयोग करुन दशांशाचे वर्गमुळ :

$\sqrt{17.64}$ या उदाहरणाने सुरुवात करु

पायरी 1: पुर्णांकी भाग म्हणजेच 17 वर रेषाखंड द्या. डावी कडुन उजवी कडे प्रत्येक जोडीवर रेषाखंड देत जा.

$|\overline{17}.\overline{64}|$

पायरी 2: अशी सर्वात मोठी (म्हणजेच 4) माहित करा की ज्याचा वर्ग पुर्णांकी भागाच्या पहिल्या जोडी (म्हणजेच 17)पेक्षा कमी किंवा च्या एवढी असायला पाहिजे. 4 ही संख्या भाजक आणि पाहिली जोडी 17 भाज्य म्हणुन घ्या. बाकी 1मिळते.भागाकार करुन बाकी मिळवा म्हणजेच 1

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
	1	

पायरी 3: बाकीच्या उजव्या बाजुला समोरची जोडी (म्हणजेच 64) लिहा तर 164 होते जे की, हे नविन भाज्य आहे.

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
	1.64	

SCERT TELANGANA

पायरी 4: भागाकाराचे दुप्पट करा $(2 \times 4 = 8)$ आणि 8 ला लिहुन त्याच्या उजव्या बाजुला एक चौकट लिहा. 64 हे दशांश भाग आहे म्हणुन भागाकाराच्या (म्हणजेच 4) ठिकाणी दशांश बिंदु द्या.

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
8□	- 164	

पायरी 5: त्या चौकटीमध्ये एक अंक अंदाज करा. आता भाजका मध्ये तयार झालेल्या नविन संख्येला जर अंदाज केलेल्या अंकाने गुणाकार केले तर आलेले उत्तर हे नविन भाज्य 164 पेक्षा कमी किंवा त्याऐवढे असायला पाहिजे. या संदर्भात तो अंक 2 आहे. भागाकार करा आणि बाकी मिळवा.

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4.2
	-16	
8$\boxed{2}$	164	
	-164	
	0	

पायरी 6: बाकी शुन्य येई पर्यंत आणि कोणतीही जोडी न उरे पर्यंत

$\sqrt{17.64} = 4.2$

आता, आणखी काही उदाहरणे पाहु.

उदाहरण 11: भागाकार पध्दतीने 42.25 चे वर्गमुळ माहित करा.

सोडवणुक: पायरी 1 : $\overline{42}.\overline{25}$

पायरी 2 :

6	$\overline{42}.\overline{25}$	6
	-36	
	6	

पायरी3 :

6	$\overline{42}.\overline{25}$	6.5
6	-36	
125	625	
	-625	
	0	

$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$.

उदाहरण 2: माहित करा $\sqrt{96.04}$

सोडवणुक:

9	$\overline{96}.\overline{04}$	9.8
9	-81	
188	1504	
	-1504	
	0	

म्हणुन $\sqrt{96.04} = 9.8$

SCERT TELANGANA

6.9 पुर्ण वर्ग नसलेल्या संख्याच्या वर्गमुळाचा अंदाज करणे:

पुर्ण वर्गाचे वर्गमुळ माहित करण्यासाठी पध्दत आपण शिकलो आहोत. जर संख्या पुर्ण वर्ग नसेल तर आपण निश्चित वर्गमुळ माहित करु शकत नाही. अशा सर्व संदर्भात कमीत कमी आपल्याला त्याच्या वर्गमुळाची अंदाज करणे आवश्यक आहे.

$\sqrt{300}$ ची किंमत जवळच्या पुर्ण संख्या मध्ये अंदाज करु या.

100 आणि 400 या पुर्ण वर्गाच्या मधला 300 ही संख्या आहे.

$\therefore\ 100 < 300 < 400$

$10^2 < 300 < 20^2$

म्हणजेच $10 < \sqrt{300} < 20$

परंतु आता पण आपण वर्गसंख्येच्या जवळ नाही आहोत. आपल्याला माहित आहे $17^2 = 289$, $18^2 = 324$

म्हणुन $289 < 300 < 324$

$17 < \sqrt{300} < 18$

324 पेक्षा 289 हे 300 च्या अगदी जवळ आहे.

म्हणुन $\sqrt{300}$ ची अंदाजे किंमत 17 आहे.

अभ्यास - 6.3

1. भागाकार पध्दतीने खालील संख्याचे वर्गमुळ माहित करा.

   (i) 1089 (ii) 2304 (iii) 7744 (iv) 6084 (v) 9025

2. खालील दशांश संख्याचे वर्गमुळ माहित करा.

   (i) 2.56 (ii) 18.49 (iii) 68.89 (iv) 84.64

3. 4000 मधुन कोणती सर्वात लहान संख्या वजा केली तर तीपुर्ण वर्ग होते.

4. 4489 चौरस सें.मी. क्षेत्रफ ळ असलेल्या चौरसाच्या बाजुची लांबी माहित करा.

5. एक माळी 8289 झाडे चौरसाच्या आकारात लावली आणि त्याला असे आढळले की, 8 झाडे उरत आहेत. तर त्याने प्रत्येक ओळीत किती झाडे लावलीत ?

6. चार अंकी लहानतली लहान पुर्ण वर्ग माहित करा.

7. 6412 मध्ये कोणती सर्वात लहान संख्या मिळवली तर ती पुर्ण वर्ग होते.?

8. खालील संख्याची किंमत जवळच्या पुर्ण संख्येत अंदाज करा.

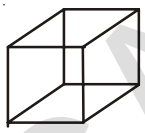
   (i) $\sqrt{97}$ (ii) $\sqrt{250}$ (iii) $\sqrt{780}$

SCERT TELANGANA

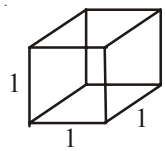
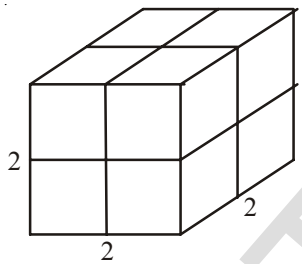
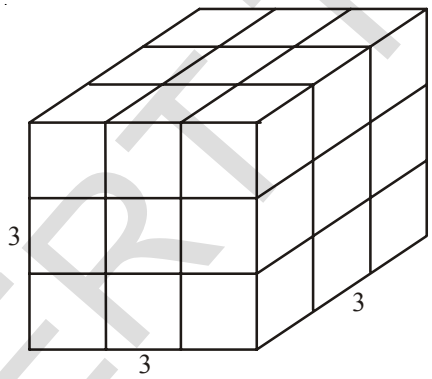
घन आणि घनमुळ

6.10 प्रस्तावना

सहा सारख्याच चौरसानी बनलेली भरीव आकृती म्हणजेच घन होय. हे आपल्याला माहित आहे.



आता, एकक घनाचा वापर करुन घनीय आकार तयार करु या.

क्र.स.	आकृती	बाजुची लांबी	वापरलेल्या एकक घनाची संख्या
1		1	1
2		2	8
3		3	27

या समोरचे घन तुम्ही तयार करु शकता का ? 5 एकक बाजु असलेली घन तयार करण्यासाठी किती एकक घनाची आवश्यकता आहे. याचा अंदाज तुम्ही करु शकता का?

म्हणुन आपल्याला घन आकार बनविण्यासाठी 1, 8, 27, 64 ..... एकक घनाची आवश्यकता आहे.

1, 8, 27, 64 ..... या संख्यांना घन संख्या किंवा पुर्ण घन म्हटल्या जाते.

SCERT TELANGANA

जसे $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

64 = …….. × …… × …… =

म्हणुन जेव्हा एकच संख्या तीन वेळेस गुणाकार केल्या जाते. तेव्हा घन संख्या मिळते.

म्हणजेच 'x' ची घन संख्या $x \times x \times x = x^3$ होय.

49 ही घन संख्या आहे का ? नाही कारण $49 = 7 \times 7$ आणि अशी कोणतीही नैसर्गीक संख्या नाही जी स्वतः तीन वेळेस गुणल्या नंतर 49 येते. $3 \times 3 \times 3 = 27$ आणि $4 \times 4 \times 4 = 64$. आपण असे सुध्दा पाहु शकतो. यावरुन असे दिसते की, 49 हे पुर्ण घन नाही आहे.

प्रयत्न करा

1. 81 हा पुर्ण घन आहे का ?
2. 125 हा पुर्ण घन आहे का ?

खालील तक्त्याचे निरिक्षण करुन पुर्ण करा.

संख्या	घन
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 =$ ……
7	$7^3 =$ …… = ……..
8	$8^3 =$ …… = ……..
9	$9^3 =$ …… = ……..
10	$10^3 =$ …… = ……..

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

(i) 1 आणि 100, 1 आणि 500, 1 आणि 1000 मध्ये पुर्ण घन असलेले संख्या किती आहेत?

(ii) 500 आणि 1000 च्या मधला किती पुर्ण घन आहेत ?

SCERT TELANGANA

11 ते 20 या संख्याचे घन खालील प्रमाणे आहेत.

संख्या	घन
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

17 आणि 18 च्या घनाच्या अंकाच्या बेरजे मध्ये तुम्हाला काही तरी विशेष वाटत आहे का.

तक्त्या वरुन आपल्याला असे दिसुन येते की, सम संख्येच्या घन केव्हांही सम संख्यांच असते. विषम संख्या साठी सुध्दा हे सत्य असु शकते का ? आणखी आपल्याला असे दिसते की, जर संख्येच्या एकम स्थानी1 असेल तर त्याच्या घनाच्या एकम स्थानी सुध्दा 1 असते

याच प्रमाणे संख्येच्या घनाच्या एकम स्थानी 0,4,5,6 किंवा 9 असेल तर तुम्ही काय म्हणाल ?

प्रयत्न करा:

1. खालील प्रत्येक संख्येचा एकम स्थानचा अंक माहित करा.

(i) 75^3 (ii) 123^3 (iii) 157^3 (iv) 198^3 (v) 206^3

6.11 काही आवडीचे नमुने :

1. क्रमाने येणाऱ्या विषम संख्याची बेरीज

खालील नमुन्याचे निरिक्षण करा.

$1 = 1 = 1^3$

$3 + 5 = 8 = 2^3$

$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$

$13 + 15 + 17 + 19 = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

5^3येण्यासाठी समोरचे किती क्रमावर विषम संख्याची बेरजेची आवश्यकता आहे? तुम्हीअंदाज करु शकता का?

SCERT TELANGANA

2. खालील नमुना पहा.

$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 7$

$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 19$

$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 37$

$5^3 - 4^3 =$ ..... = ...

वरील नमुन्याचा उपयोग करुन खालील ची किंमत माहित करा.

(i) $10^3 - 9^3$ (ii) $15^3 - 14^3$ (iii) $26^3 - 25^3$

3. खालील नमुन्याचे निरिक्षण करुन ते पुर्ण करा.

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = (\ )^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (_____)^2$

..... $= (1 + 2 + 3 + ... + 10)^2$

आपण त्याचे सामन्यीकरण करु शकतो.

पहिल्या 'n' नैसर्गिक संख्याच्या घनांची बेरीज ही त्या संख्याच्या बेरजेच्या वर्गाएवढी असते.

म्हणजेच $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

6.12 घन आणि त्याचे मुळ अवयव :

64 आणि 216 ही संख्या घेऊ

64 आणि 216 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकारामध्ये लिहु

64 = $\cancel{2 \times 2 \times 2} \times \cancel{2 \times 2 \times 2}$

216 = $\cancel{2 \times 2 \times 2} \times \cancel{3 \times 3 \times 3}$

दोन्ही संदर्भात प्रत्येक अवयव तीन वेळेस आलेला आहे. मुळ अवयवाना त्रिकुट मध्ये गट करु शकतो.

अशा प्रकारे जर तीन सारख्या अवयवाच्या गुणाकारामध्ये एखादी संख्या दर्शवु शकतो. त्या सख्येला पुर्ण घन किंवा घन संख्या म्हटल्या जाते.

SCERT TELANGANA

540 हे पुर्ण घन आहे का ?

2	540
2	270
3	135
3	45
3	15
5	5
	1

540 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकारामध्ये लिहु.

$540 = 2 \times 2 \times \cancel{3 \times 3 \times 3} \times 5$

येथे 2 आणि 5 त्रिकुट गटात नाही आहेत.

म्हणुन 540 हे पुर्ण घन नाही आहे.

हे करा.

1. खालील पैकी कोणते पुर्ण घन आहेत ?

(i) 243 (ii) 400 (iii) 500 (iv) 512 (v) 729

उदाहरण 13: 2560 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने गुणले असता आलेला गुणाकार पुर्ण घन होईल ?

2	2560
2	1280
2	640
2	320
2	160
2	80
2	40
2	20
2	10
	5

सोडवुणक : 2560 ला मुळ अवयाच्या गुणाकारामध्ये लिहु

$2560 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5$

5 हा मुळ अवयव त्रिकुट गटात नाही आहे.

म्हणुन 2560 हे पुर्ण घन नाही आहे.

म्हणुन $5 \times 5 = 25$ या लहानतल्या लहान संख्येने त्याला गुणले असता आलेला गुणाकार पुर्ण घन होईल.

उदाहरण 14: 1600 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने भागले असता आलेला भागाकार पुर्ण घन होईल ?

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

सोडवणुक : 1600 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकारामध्ये लिहु

$1600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$

5 हा मुळ अवयव त्रिकुट गटात नाही.

म्हणुन 1600 हा पुर्ण घन नाही आहे.

म्हणुन $5 \times 5 = 25$ या सर्वात लहान संख्येने त्याला भागले असता आलेला भागाकार पुर्ण घन होईल.

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 6.4

1. खालील संख्याचे घन माहित करा.
   (i) 8 (ii) 16 (iii) 21 (iv) 30
2. दिलेल्या संख्या पुर्ण घन आहेत का नाही तपासणी करा.
   (i) 243 (ii) 516 (iii) 729 (iv) 8000 (v) 2700
3. 8788 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने गुणले असता ते पुर्ण घन होईल.?
4. 7803 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने गुणले असता आलेला गुणाकार पुर्ण घन होईल.?
5. 8640 ला कोणत्या सर्वात लहान संख्येने भागले असता आलेला भागाकार पुर्ण घन होईल.?
6. रवी ने 12 सें.मी., 8 सें.मी. आणि 3 सें.मी. मापाचा चिकणमातीचा आयतज बनविला. एक घन बनविण्यासाठी असे कमीत कमी किती आयतजची आवश्यकता आहे.?
7. $3^{11} + 5^{13}$ च्या किंमतीला कोणत्या सर्वात लहान मुळ संख्याने भाग जातो ?

6.13 घनमुळ

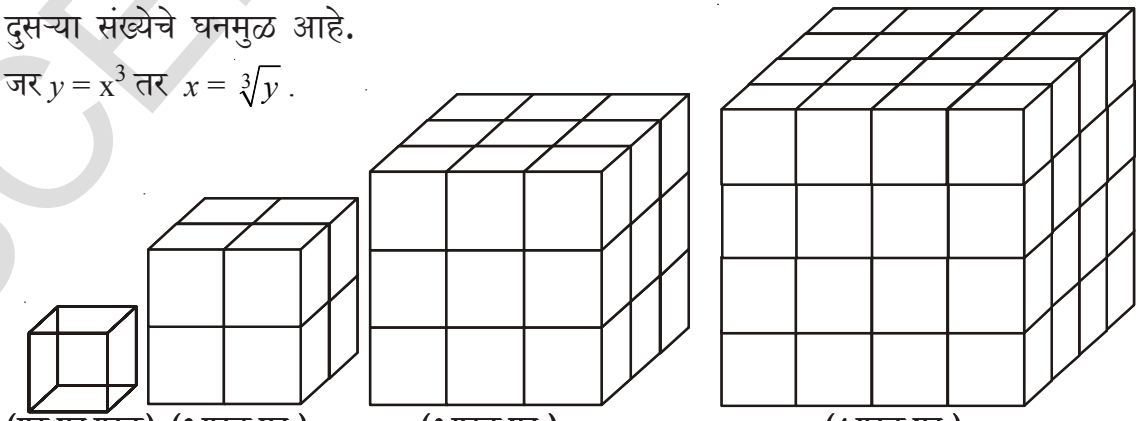
2 एकक बाजु असलेला घन बनविण्यासाठी आपल्याला 8 एकक घनाची आवश्यकता आहे हे ($2^3 = 8$) हे आपल्याला माहित आहे. तसेच 3 एकक बाजु असलेल्या घनासाठी आपल्याला 27 एकक घनाची आवश्यकता आहे. ($3^3 = 27$) समजा, एक घन 24 एकक घनानी बनलेला आहे. तर त्या घनाची बाजु किती असु शकते हे सांगा?

त्याच्या बाजुची लांबी 'x' समजु या $\therefore$ $64 = x^3$

घनाची बाजु माहित करण्यासाठी 64 हे कोणत्या संख्येचा घन आहे हे माहित करणे आवश्यक आहे. म्हणुन, कोणत्या संख्याचे घन आहे हे माहित करणे यालाच घनमुळ माहित करणे म्हणतात. हे घनाचे व्यस्त क्रिया आहे. जसे, $4^3 = 64$ तर 4 हे 64 चे घनमुळ आहे.

याला आपण $\sqrt[3]{64} = 4$. असे लिहितो $\sqrt[3]{\ }$ हे चिन्ह घनमुळ दर्शवितो. म्हणुन 'x'ही संख्या y,या दुसऱ्या संख्येचे घनमुळ आहे.

जर $y = x^3$ तर $x = \sqrt[3]{y}$.



(एक घन एकक) (2 एकक घन) (3 एकक घन) (4 एकक घन)

SCERT TELANGANA

खालील तक्ता पुर्ण करा.

घन			घनमुळ		
1^3	=	1	$\sqrt[3]{1}$	=	1
2^3	=	8	$\sqrt[3]{8}$	=	2
3^3	=	27	$\sqrt[3]{27}$	=	3
4^3	=	64	$\sqrt[3]{64}$	=	4
5^3	=	125	$\sqrt[3]{125}$	=	5
6^3	=	.....	$\sqrt[3]{\ }$	=	6
7^3	=	.....	$\sqrt[3]{\ }$	=	7
8^3	=	.....	$\sqrt[3]{\ }$	=	8
.....	=	.....	.....	=	.....
.....	=	.....	.....	=	.....

6.14 मुळ अवयव पध्दती व्दारा घनमुळ माहीत करणे:

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

1728 चे मुळ अवयव पध्दतीने घनमुळ माहित करु या.

पायरी1 : दिलेली संख्या 1728 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकारामध्ये लिहु

$1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

पायरी2 : तीन समान अवयवाचे गट तयार करा.

$1728 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

पायरी 3: प्रत्येक गटातुन एक अवयव घ्या आणि त्यांचा गुणाकार करा.

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

आणखी काही उदाहरण पाहु या.

2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

उदाहरण 15: 4096 चे घनमुळ माहित करा. ?

Solution : 4096 ला मुळ अवयवयाच्या गुणाकारामध्ये लिहु

$4096 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

$\sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$

SCERT TELANGANA

6.15 संख्याच्या घनमुळाचा अंदाज करणे.

जर आपल्याला माहित असले की दिलेली संख्या घन संख्या आहे तर त्याचे घनमुळ काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा वापर करु शकतो.

9261 चा अंदाजाने घनमुळ माहित करु या.

पायरी1: एकम स्थानाकडुन सुरुवात करुन तीन तीन अंकाचे गट तयार करु.

म्हणजेच	9	261
	दुसरा गट	पहिला गट

पायरी 2: पहिला गट म्हणजेच 261 आपल्याला घनमुळातील एकक स्थानचा अंक देतो. 261 एकमस्थानी 1 आहे. त्यामुळे घनमुळातील एकमस्थानचा अंक पण 1 असतो. म्हणुन एकम स्थानाचा अंक 1 आहे.

पायरी 3: आता, दुसरा गट घ्या म्हणजेच 9.

आपल्याला माहित आहे. $2^3 < 9 < 3^3$.

लहान संख्या 2 आहे, हे पाहिजे असलेल्या घनमुळातील दहम स्थानाचा अंक आहे.

$\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$

अभ्यास - 6.5

1. मुळ अवयव पध्दतीने खालील संख्याचे घनमुळ माहित करा.
   (i) 343 (ii) 729 (iii) 1331 (iv) 2744
2. अंदाजाने खालील संख्याचे घनमुळ माहित करा ?
   (i) 1512 (ii) 2197 (iii) 3375 (iv) 5832
3. सत्य आणि असत्य ते सांगा ?
   (i) समसंख्येचे घन विषम असते.
   (ii.) पुर्ण घनाचे शेवटचे दोन अंक शुन्य असु शकतात.
   (iii) जर एखाद्या संख्येचा एकम स्थानी 5 असेल तर त्यांना घनाच्या एकम स्थानी सुध्दा 5 असते.
   (iv) एखाद्या संख्येच्या एकम स्थानी शुन्य असेल तर त्याच्या घनामध्ये शेवटचे तीन अंक शुन्य असतात.
   (v) एक अंकी संख्याचे घन एक अंकी संख्या असु शकते.
   (vi) एकम स्थानी 8 हा अंक असलेली संख्या पुर्ण घन होत नाही.
   (vii) दोन अंकी संख्येचा घन तीन अंकी संख्या असु शकते.
4. दोन अंकी संख्या माहित करा जे की वर्ग संख्या आहे तसेच घनीय संख्या पण आहे.

SCERT TELANGANA

आपण काय चर्चा केली :

- संख्येच्या वर्गामधील अंकाच्या संख्येचा अंदाज करणे.
- वर्ग संख्याना वेगवेगळ्या नमुन्यात लिहीणे.
- a, b, c हे पुर्ण संख्या आहे. जर आणि फक्त जर $a^2 + b^2 = c^2$ असेल तर {a, b, c} यांना पायथोगरन त्रिकुट म्हणतात.
- मुळ अवयव आणि भागाकार पध्दतीने वर्गमुळ माहित करणे.
- पुर्ण वर्ग नसलेल्या संख्याचा वर्गमुळाचा अंदाज करणे.
- संख्याच्या घनमुळाचा अंदाज करणे.
- पुर्णांकाचा वर्ग हे पुर्णांक आणि वर्गसंख्या आहे. जिथे परिमेय संख्याचा वर्ग हे पुर्ण वर्ग आहे.
- वर्ग करण्याचा उलट प्रक्रिया म्हणजे वर्गमुळ होय.
- एखादी संख्या स्वता: तिन वेळेस गुणाकार होत असेल तर ती घनसंख्या आहे.

नियमीत त्रिकाणे

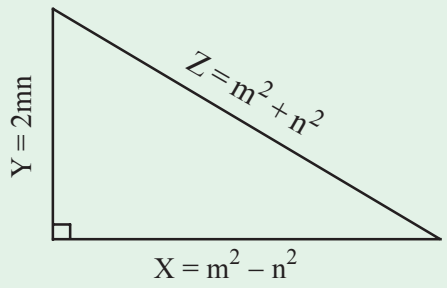
काटकोन त्रिकोणाचे बाजु पुर्णांकात असलेले सुत्र डिफोनटस च्या काळापासुन आणि प्राचिन ग्रीस पासुन माहित आहे.

एक बाजु $X = m^2 - n^2$

दुसरी बाजु $Y = 2mn$

कोन $Z = m^2 + n^2$

m आणि n हे कोणतेही निवडक पुर्णांक आहेत.



उदाहरण

m	n	$X = m^2 - n^2$	$Y = 2mn$	$Z = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
4	1	15	8	27

SCERT TELANGANA

थडा 7

वारंवारता वितरण सारणी आणि आलेख

7.0 प्रस्तावना

जगदीश खेळाच्या बातम्या पाहात आहे. ऑलंपीक 2012 मध्ये वेगवेगळ्या देशांनी जिंकलेल्या पदकांचा तपशिल दाखविणारे दृष्य टी.व्ही. वर आहे.

ऑलंपिक 2012 - पदके

क्रमांक	देश	स्वर्ण	रजत	कांस्य	एकुण
1	अमेरीका	46	29	29	104
2	चिन	38	27	23	88
3	ब्रिटेन	29	17	19	65
4	रशिया	24	26	32	82
5	कोरीया	13	8	7	28

वरील सारणीत ओलंपीक 2012 मध्ये वरच्या पाच देशांनी मिळविलेली जास्तीत जास्त पदकांची, जिंकलेल्या एकुण पदकांची सामग्री उपलब्ध केलेली आहे.

संख्येच्या रुपात उपलब्ध असलेली सामग्री किंवा शब्दाच्या रुपात किंवा आलेखाच्या रुपात असलेली सामग्री निर्णय घेण्यासाठी किंवा निश्कर्ष काढण्यासाठी उपयोगी पडते यालाच गृहीत सामग्री -डाटा म्हणतात.

- कोणत्या देशांनी सर्वांत जास्त पदके मिळविली आहेत.?
- कोणत्या देशांनी सर्वात जास्त कांस्य पदके मिळविली आहेत.?
- सारणीतील उपलब्ध केलेल्या सामग्रीवरुन आणखी तीन प्रश्न लिहा.

प्रयत्न करा

सामग्री ची तीन उदाहरणे शब्दाच्या रुपात आणि तीन उदाहरणे संख्येच्या रुपात द्या.

SCERT TELANGANA

7.1 केंद्रीय प्रवृत्तीची मुलभुत परिमाणे

जेव्हा आपण सामग्री गोळा करतो. तेव्हा आपणास सामग्रीच्या आधारावरुन निश्कर्ष काढण्याची गरज आहे.
कधी कधी आपण एकुण कधी कधी सरासरी इत्यादी वापरतो. मागील वर्गात आपण मुलभुत प्रमाण जसे, मध्य,मध्यक आणि बहुलक
या बद्दल चर्चा केली. चला त्यांची उजळणी करु या.

7.1.1 अंकगणितीय मध्य

संख्याच्या संचासाठी अंक सरासरी म्हणजेच सरासरी ज्यामध्ये सर्व अवलोकनांच्या बेरजेला एकुण अवलोकनाच्या
संख्येनी भाग देतो.

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_n$ ची अंकगणितीय मध्य

$$\text{अंकगणितीय मध्य} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum X_i}{N} \quad \text{(संक्षिप्त दर्शवणुक)}$$

$\sum x_i$ सर्व x_i ची बेरीज जेथे I ही 1 ते n किंमत घेते.

उदाहरण 1: अशोकला घटक चाचणीत विविध विषयात मिळालेले गुण. 20,11,21,25,23 आणि 14 आहे. या गुणांचा अंकगणितीय मध्य काढा ?

सोडवणुक: अवलोकन = 20, 11, 21, 25, 23 आणि 14

$$\text{अंकगणितीय मध्य } \bar{x} = \frac{\sum X_i}{N}$$

$$= \frac{20+11+21+25+23+14}{6} = \frac{114}{6}$$

$$\bar{x} = 19$$

उदाहरण 2: 7 अवलोकनाची अंकगणितीय मध्य 32 आहे. जर अजुन एक अवलोकन 48 त्या अवलोकनात मिळविल्यास सामग्रीची खरी सरासरी काय होते ?

सोडवणुक:

7 अवलोकनाची मध्य	$\bar{x}$	=	32		
7 अवलोकनाची बेरीज	$\sum X$	=	32×7	=	224
मिळविलेले अवलोकन		=	48		
8 अवलोकनाची बेरिज	$\sum X$	=	$224 + 48$	=	272

$$\therefore \text{ 8 अवलोकनाची सरासरी } \bar{x} = \frac{\sum X}{N} = \frac{272}{8} = 34$$

उदाहरण 3: क्लबच्या 25 सदस्यांचे सरासरी वय 38 वर्ष आहे. जर 42 सरासरी वयाचे 5 सदस्यांनी क्क्लब सोडले असता क्लब सदस्यांचे आजचे सरासरी वय काय आहे.?

सोडवणुक: क्लबच्या 25 सदस्यांचे सरासरी वय = 38 वर्ष

SCERT TELANGANA

25 सदस्यांचे एकुण वय = 38×25 = 950
5 सदस्यांचे सरासरी वय (सोडलेले) = 42 वर्ष
5 सदस्यांचे एकुण वय = 42×5 = 210
उललेल्या 20 सदस्यांचे एकुण वय = $950 - 210$ = 740

$\therefore$ क्लबच्या सदस्यांचे आजचे सरासरी वय $\bar{x} = \frac{\sum X}{N} =$

$\frac{740}{20} = 37$ वर्ष

उदाहरण 4: 9 अवलोकनाचा अंकगणितीय मध्य 45 मोजल्या गेली. असे करतांना एक अवलोकन 24 च्या ऐवजी 42 घेतले असता अचुक मध्य कीती येते.?

सोडवणुक: अवलोकनाची मध्य = 45
अवलोकनाची बेरीज = $45 \times 9 = 405$
मोजतांना 24 च्या ऐवजी 42 घेतले
$\therefore$ 9 अवलोकनाची अचुक बेरीज = $405 - 42 + 24$ = 387

9 अवलोकनाची खरा मध्य = $\frac{\sum X}{N} = \frac{387}{9}$ = 43

सुचना :

- वरील उदाहरणावरुन आपणास दिसुन येते की, अंकगणितीय मध्य ही संपुर्ण सामग्रीची दर्शविलेली किंमत आहे.
- अंकगणितीय मध्य ही एकुण अवलोकन आणि प्रत्येक अवलोकनाच्या किंमतीवर अवलंबुन असते.
- हे अव्दितीय असुन सर्व अवलोकनावर अवलंबुन आहे.
- जेव्हा सामग्रीचे सर्व अवलोकन एका विशिष्ट संख्येने वाढविले किंवा कमी असता, सरासरी सुध्दा त्याच संख्येने वाढले आणि कमी होते.
- जेव्हा सामाग्रीच्या सर्व अवलोकनास एका निश्चित संख्येने गुणले किंवा भागले असता सरासरी (मध्य) ला सुध्दा त्या संख्येने गुणाकार किंवा भागले पाहिजे.

7.1.2 विचलन पध्दतीव्दारे अंकगणिताचा मध्य

येथे सामग्रीत 7,10,15,21,27 पाच अवलोकन आहेत. जर शिक्षकाने सामग्रीवरुन बेरीज न करता अंकगणितीय मध्य काढायाला सांगीतले असता कमल, निलीमा आणि लेख्या या तीन विद्यार्थ्यांनि उत्तर दिले. कमलने अंदाजे सांगीतले की, हे किंमतीच्या किमान आणि कमाल किंमतीमध्ये स्थित असते ते 17 आहे.

निलीमाने अंदाजे सांगीतले की ही क्रमवार माहितीची मधली किंमत 15 आहे

लेख्याने त्या सर्व अवलोकानाची बेरीज केली आणि त्यास संख्येने भागले तिला 16 आले.

आपण या सर्व 'अंदाजे मध्य' किंवा 'गृहीत मध्य ' म्हणतात त्यास 'A' दर्शवितात.

कोणता अंदाज वास्तविक सरासरीशी ततोतंत मिळते. याची पडताळणी करा.

SCERT TELANGANA

संदर्भ1: समजा कमलचा अंदाजे अंकगणितीय मध्य A = 17

तीचा अंकगणितीय मध्य $\bar{x} = \frac{\sum X}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5} = \frac{80}{5} = 16$

जर प्रत्येक अवलोकन गृहीत धरलेल्या मध्यच्या विचलन रुपात लिहिले असता आपणास

गणना	A	विचलानाच्या पदात
7	17	7 = 17 – 10
10	17	10 = 17 – 7
15	17	15 = 17 – 2
21	17	21 = 17 + 4
27	17	27 = 17 + 10

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5\times 17}{5} + \frac{-10-7-2+4+10}{5}$$

$$= 17 + \frac{-5}{5} = 17 - 1 = 16$$

∴ अंकगणितीय मध्य = अंदाजे सरासरी + विचलनाची मध्य

संदर्भ 2: समजा, निलीमाचा अंदाजे अंकगणितीय मध्य A = 15

त्यांची अंकगणितीय मध्य $\bar{x} = \frac{\sum X}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

⇒विचलनात $\bar{x} = \frac{(15-8)+(15-5)+(15-0)+(15+6)+(15+12)}{5}$

$$= \frac{5\times 15}{5} + \frac{-8-5-0+6+12}{5}$$

$$= 15 + \frac{5}{5} = 15 + 1 = 16$$

संदर्भ 3: समजा लेख्याची अंदाजे अंकगणितय मध्य A = 16

त्याची अंकगणितीय मध्य $\bar{x} = \frac{\sum X}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$

⇒विचलनात $\bar{x} = \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$

$$= \frac{5\times 16}{5} + \frac{-9-6-1+5+11}{5}$$

$$= 16 + \frac{0}{5} = 16$$

प्रयत्न करा

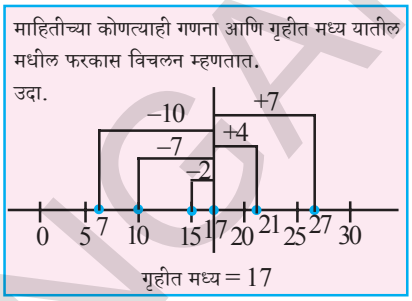
वरील संदर्भाचा अंदाजे मध्य, वास्तविक मध्य याचा तक्ता बनवा, विचलानाच्या सरासरीला अंदाजे मध्य आणि वास्तविक मध्यमधील फरका सोबत पाहणी केली असता. तुम्हाला काय दिसुन येते?

[सुचना : विचलनाच्या सरासरीची तुलना करा.]

SCERT TELANGANA

वरील चर्चे वरुन हे स्पष्ट झाले की, अंदाजे सरासरी ही अंकगितीय मध्य होते जर अंदाजे विचलनातील मध्य सर्व अवलोकनाच्या बेरीज शुन्य येत असेंल तर आपण पडताळ्याच्या पध्दतीचा सामग्रीची अंकगणितीय मध्य काढण्यासाठी वापर करतो.

वरील संदर्भात त्यातील अंदाजे सरासरी आणि सर्व अवलोकनाच्या विचलनाव्दारे अंकगणितीय मध्य काढण्याचा पुरावा मिळतो.



अंकगणितीय मध्य = अंदाजे सरासरी + विचलनाची सरासरी

$$= \text{अंदाजे सरासरी} + \frac{\text{विचलनाची बेरीज}}{\text{अवलोकनाची संख्या}}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum(X-A)}{N}$$

उदाहरण 5: गृहीत मध्य 40 धरुन 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50, 62 या 10अवलोकनाची अंकगणितीय मध्य काढा.नियमीत सुत्राने सुध्दा मध्य काढा. तुम्हास काय फरक येतो.

सोडवणुक: सामग्रीचे अवलोकन = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 62

समजा गृहीत मध्य A = 40

$$\therefore \text{ अंकगणितीय मध्य } = A + \frac{\sum(X-A)}{N}$$

$$\bar{x} = 40 + \frac{(14-40)+(25-40)+(28-40)+(32-40)+(35-40)+(36-40)+(42-40)+(50-40)+(56-40)+(62-40)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-26)+(-15)+(-12)+(-8)+(-5)+(-4)+(2)+(10)+(16)+(22)}{10}$$

$$= 40 + \frac{-70+50}{10}$$

$$= 40 - \frac{20}{10}$$

$$= 40 - 2 = 38$$

सुत्रावरुन $\bar{x} = \frac{\sum X}{N} = \frac{14+25+28+32+35+36+42+50+56+62}{10}$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

दोन्ही पध्दतीत सारखीच सरासरी आली.

अशा प्रकारे मोठ्या संख्या, दशांश असलेल्या सामग्रीसाठी विचलन पध्दतीव्दारे अंकगणितीय मध्य काढणे सोईस्कर होते.

SCERT TELANGANA

खालील उदाहरण घेऊ

उदाहरण 6: एका आठवड्यात शेअर ची बाजारात किंमत (रुपयात) 3672,3657,3673,3665, बदलली आहे. शेअर च्या किंमतीचे अंकगणितीय मध्य माहित करा.

सोडवणुक: सामग्रीचे अवलोकन = 3657, 3665, 3668, 3672, 3673

अंदाजे सरासरी = 3668

अंकगणितीय मध्य $\bar{x} = A + \frac{\sum(X-A)}{N}$

$$= 3668 + \frac{(3657-3668)+(3665-3668)+(3668-3668)+(3672-3668)+(3673-3668)}{5}$$

$$= 3668 + \frac{(-11-3-0+4+5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = 3667.$$ रुपये.

प्रयत्न करा.

1. खालील सामग्रीच्या अंकगणितीय मध्याचा अंदाज काढा.
   (i) 17, 25, 28, 35, 40
   (ii) 5, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 13, 19, 19, 19, 20
2. गणित सोडवुन तुमच्या उत्तराचा पडताळा करा.

प्रकल्प कार्य

1. नुकत्याच झालेल्या परिक्षेत तुमच्या वर्गातील 10 विद्यार्थ्यांचे त्यांनी विविध विषयातील मिळालेले गुण गोळा करा. प्रत्येक विषयातील गुणांची अंदाजे सरासरी काढा आणि त्यांची प्रत्येक वास्तविक सरासरीशी पडताळा करुन पहा. तुमच्या किती अंदाज्यात खरी सरासरी दर्शविते ?
2. तुमच्या वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या उंचीची अंदाजे सरासरी काढा आणि तुमच्या व्यायाम शिक्षकाच्या नोंदणी पुस्तकाशी पडताळा करुन पहा.

7.1.3 मध्यक (median)

मध्यक हे केंद्रीय प्रवृत्तीचे एक परिमाण आहे. जेव्हा वितरणास आपण चढात्या किंवा उत्तरात्या क्रमाणे लिहितो. त्याची मधली किंमत म्हणजे मध्यक होय. म्हणजे यात काही अवलोकन वर असतात तेवढेच खाली असतात.

जर सामग्रीतील **n** अवलोकनाला चढात्या आणि उत्तराच्या क्रमाने माडल्यास

- जेव्हा **n** विषम असते $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ अवलोकन मध्यक आहे.

SCERT TELANGANA

- जेव्हा **n** सम असुन दोन मधल्या अवलोकनाचा अंकगणितीय मध्य $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ आणि $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ हा सामग्रीचा मध्यक होते

उदारहाण 7: 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50 या 9 अवलोकनाची मध्यक काढा.

सोडवणुक: सामग्रीचा चढता क्रम = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

एकुण अवलोकन n = 9 (विषम संख्या)

सामग्रीचा मध्यक $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ अवलोकन

= 5 वे अवलोकन = 35

∴ मध्यक = 35

उदाहरण 8: जर वरील सामग्रीत दुसरे अवलोकन 61 मिळविले असता मध्यक किती येते ?

सोडवणुक: सामग्रीचा चढता क्रम = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

एकुण अवलोकन n = 10 (समसंख्या)

आता सामग्रीत मधांत दोन संख्या येतात.

सामग्रीचा मध्यक = अंकगणितीय मध्य $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ आणि $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ अवलोकन

= 5 वे आणि 6 वे अवलोकनाचे अंकगणितीय मध्य

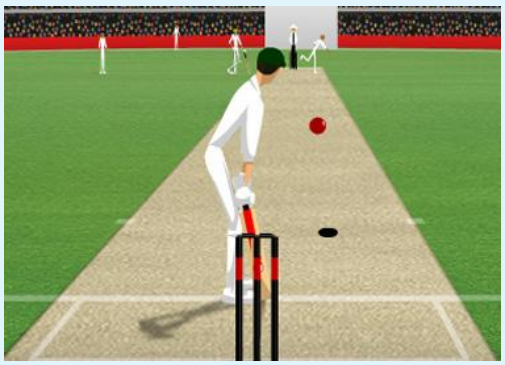
$= \frac{35+36}{2} = 35.5$

हे करा

इथे काही भारतीय क्रिकेट पटुंची उंची दिलेली आहे. या संघांची मधली उंची काढा.

अ.क्र	खेळाडुचे नांव	उंची
1.	वि.वि.एस. लक्ष्मण	5'11"
2.	पार्थीव पटेल	5'3"
3.	हरभजन सिंग	6'0"
4.	सचिन तेंडुलकर	5'5"
5.	गौतम गंभीर	5'7"
6.	युवराज सिंग	6'1"
7.	रॉबिन उथप्पा	5'9"
8.	विरेंद्र सहवाग	5'8"
9.	जहिर खान	6'0"
10.	एम.एस. धोनी	5'11"

5' 10" म्हणजे 5 फुट 10 इंच



SCERT TELANGANA

सुचना:

- मध्यक हे क्रमवार सामग्रीतील मधली किंमत आहे.
- हे एकुण अवलोकन आणि क्रमवार सामग्रीच्या मधल्या अवलोकनावर निर्भर राहाते. कोणत्याही प्रकारच्या किंमतीत बदल झाल्यास याच्यावर काहीही परिणाम होत नाही.

प्रयत्न करा.

1. 24,65,85,12,45,35,15 या सामग्रीचा मध्यक काढा.
2. जर x, $2x$, $4x$ चा मध्यक 12 आहे तर सामग्रीचा मध्य काढा.
3. जर 24, 29, 34, 38, x चा मध्यक 29 तर 'x' हा
   (a) > 38 (b) < 29 (c) 29 आणि 34च्या मध्ये (d) कोणताही नाही

7.1.4 बहुलक (mode)

जेव्हा आपणास वर्गातील मुलांच्या गणवेशाची आवडता रंग कोणता आहे याची माहिती घेणे अवश्यक ठरते किंवा दुकानातील जास्त विक्री जाणाऱ्या शर्टांचा आकार यासाठी आपण बहुलकचा वापर करतो.बहुलक ही जास्त वारवार येणारी किंमत आहे.

खालील उदाहरण घेऊ

उदाहरण 9: एका शुमार्ट मध्ये आठवड्यात वेगवेगळ्या आकराची(इंची मध्ये) विक्री ; 7, 9, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 6, 3, 5, 5, 7, 10, 7, 8, 7, 9, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 7, 9, 7. दुसऱ्या आठवड्यात विकण्यासाठी कोणत्या आकाराचे जास्त बुट दुकानात ठेवले पाहिजे? कारण सांगा.

सोडवणुक: आपण दिलेली सामग्री क्रमाने लिहिली असता.

3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10.

वरील सामग्रीवरुन स्पष्ट झाले की, 7 इंच आकाराच्या बुटाची विक्री जास्त संख्येत आहे. अशा प्रकारे दिलेल्या सामग्रीचा बहलुक 7 आहे. म्हणुन विक्रीसाठी 7 इंच बुटांची संख्या जास्त प्रमाणात ठेवली पाहिजे.

उदाहरण 10: A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, O, AB, O, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O. रक्त गट असलेल्या 50 दात्यांनी रक्तदान छावणी मध्ये भाग घेतला. तर बहुलक काढा.

सोडवणुक: सामग्रीच्या निरिक्षणावरुन A गट 12,वेळा B गट 7वेळा, AB गट12वेळा O गट 19 वेळा आला हे आपणास माहित होते.

$\therefore$ सामग्रीचा बहुलक = 'O' गट आहे.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

जर एक किंवा दोन आणखी, अवलोकन, बहुलकाचा बरोबर सामग्रीत मिळविल्यास बहुलकात काय फरक होते का?

SCERT TELANGANA

सुचना :

- सामग्रीत बहुलक हा सर्वाधिक वारंवार येणारे अवलोकन आहे.
- हे अवलोकनाच्या संख्येवर किंवा अवलोकनाच्या सर्व किंमतीवर निर्भर नसते.
- याचा वापर सांख्यीक आणि शाब्दिक सामग्रीचे विश्लेषण करण्यासाठी होतो.
- येथे सारख्या सामग्रीचे 2 किंवा 3 किंवा अनेक बहुलक असतात.

अभ्यास - 7.1

1. एका आठवड्यातील स्वस्त धान्याच्या दुकानात एका दिवशी झालेल्या विक्रीचे अंकगणितीय मध्य काढा.

   10000रु, 10250रु, 10790रु.,9865रु.,15350रु., 10110 रु.
2. 10.25, 9, 4.75, 8, 2.65, 12, 2.35 या सामग्रीचा मध्य माहित करा.
3. आठ अवलोकनाचा मध्य 25 आहे. जर एक अवलोकन 11 वगळले असता उरलेल्या अवलोकनाचे मध्य काढा.
4. नऊ अवलोकनाचा अंकगणितीय मध्य 38 मोजल्या गेला आहे. परंतु असे करतांना एक अवलोकन चुकीने 72 च्या ऐवजी 27 घेतल्यास सामग्रीचा खरा मध्य माहित करा.
5. पाच वर्षापुर्वी कुंटुंबाचे सरासरी वय 25 वर्ष होते. तर कुटुंबाचे आजचे सरासरी वय काढा
6. दोन वर्षापुर्वी 40 लोकांचे सरासरी वय 11 वर्ष होते. आता त्यातुन एक व्यक्ती कमी झाला आणि सरासरी वय बदलुलन 12 वर्ष झाले. तर त्या गटातुन निघुन गेलेल्या व्यक्तीचे वय माहित करा.
7. 5, 8, 10, 15, 22 सामग्रीच्या सर्व अवलोकानाच्या विचलनाची बेरीज त्याच्या दिलेल्या सामग्रीच्या मध्यामधुन काढा.
8. मध्यतील 20 विचलनाची बेरीज 100 आहे. तर मध्य विचलन काढा.
9. 12 विद्यार्थ्यांचे चाचणी परिक्षेत आलेले गुण 4, 21, 13, 17, 5, 9, 10, 20, 19, 12, 20, 14 आहेत मध्य गृहीत धरा आणि सामग्रीचे अंकगणितीय मध्य काढा. पुन्हा दुसरी संख्या गृहीत मध्य समजा आणि अंकगणितीय मध्य पुन्हा माहित करा. तुम्हाला एक सारखेच उत्तर येते का टिप्पणी करा ?
10. 10 विद्यार्थ्यांनी प्राप्त केलेल्या गुणांचा (25पैकी) अंकगणितीय मध्य 15 आहे त्यापैकी एक विद्यार्थीनी करीश्माने 9 विद्यार्थ्यांना विचारुन तिच्या जिवाणामध्ये विचलनास माहित केली आणि त्याची नोंद $-8, -6, -3, -1, 0, 2, 3, 4, 6$. तर करिश्माचे गुण माहित करा.
11. 25 च्या 'n' अवलोकनच्या विचलनाची बेरीज सुमारे 25 आहे आणि 35 च्या'n'अवलोकनाच्या विचलनाची बेरीज 25 आहे. तर अवलोकनाचा मध्य काढा.फ
12. 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8 या सामग्रीचा मध्यक काढा
13. चढत्या क्रमाने मांडलेल्या 10, 12, 14, $x - 3$, x, $x + 2$, 25. अवलोकनाचा मध्यक15 तर x माहित करा.
14. 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10 चा बहुलक काढा.

SCERT TELANGANA

15. एका निश्चित गणनेचा बहुलक x आहे. जर प्रत्येक गणनेतुन 3 कमी केले असता नव्याने येणाऱ्या श्रेणीचा बहुलक काढा.
16. 1 - 100 नैसर्गिक संख्या लिहिण्यासाठी वापरणाऱ्या सर्व अंकाचा बहुलक काढा.
17. कच्च्या सामग्रीचे अवलोकन 5, 28, 15, 10, 15, 8, 24. आहेत. अजुन चार संख्या त्यात अशा रितीने मिळवा की, मध्य आणि मध्यक सारखा आला पाहिजे परंतु बहुलक 1 ने वाढला पाहिजे.
18. $x_1, x_2, ..., ..., x_{10}$ या अवलोकानाचा मध्य 20तर $x_1 + 4$, $x_2 + 8, x_3 + 12, ..., x_{10} +$ 40चा मध्य काढा.
19. 9 पुर्णांकाच्या यादीतील 6 पुर्णांक संख्या 7,8,3,5,9 आणि 5 आहे. तर त्या 9 पुर्णांक संख्येतील संभाव्य मोठी मध्यकाची किंमत काढा.
20. 9 वेगवेगळ्या अवलोकानाचा मध्यक 20 आहे त्या संचातील सर्वात मोठ्या 4 अवलोकनास 2 ने वाढविल्यास येणाऱ्या संचाचा मध्यक काढा.

7.2 संग्रहीत सामग्रीची रचना

मागील वर्गात ताळ्याच्या खुणेवरुन सामग्रीची रचने करणे आपण शिकलो जर सामग्री मोठी असल्यास काय होते ? आपण त्यास सोइस्कर गटात विभागणी करुन सामग्रीची रचना करतो यालाच संग्रहीत सामग्री म्हणतात. खालील उदाहरणे पहा.

एका बांधकाम करणाऱ्या कंपनीने कर्मचाऱ्याच्या पगारावरुन कर्मचाऱ्यासाठी विविध प्रकारची घर बांधण्याची योजना केली. त्यासाठी त्यांनी 100 कर्मचाऱ्याच्या महिण्याचा पगाराची माहिती गोळा केली. ते (रुपयांत) 15000, 15750, 16000, 16000,16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250..... 75000आहेत.

ही 100 अवलोकनाची मोठी सामग्री आहे. त्याची सुरुवात 15000 रुपये ते 75000रुपये आहे. जरी करी करता आपण वारवारंता सारणी प्रत्येक अवलोकनासाठी बनविली तरी सारणी मोठी होते. त्या खेरीज सामग्रीला लहान उत्पन्नाच्या गटात जसे 10001 – 20000, 20001 – 30000, . . . , 70001 – 80000वर्गीकृत केले पाहिजे. या लहान गटांना वर्गांतर म्हणतात. वर्गगट 1001 - 2000 या मध्ये 1001 आणि 20000 मधील सर्व अवलोकन येते आणि 1001 आणि 2000 सुध्दा यातच येते. यालाच **असलग वर्ग** **(inclusive Class)** म्हणतात यात 1001 ला खालची सीमा आणि 2000 ला वरची सीमा म्हणतात.

7.2.1 संग्रहीत वारंवारता वितरणाचे स्पष्टीकरण

उदाहरण 11: 30 विद्यार्थ्यांनी गणिताच्या चाचणीत मिळविलेले गुण बाजुला संग्रहीत वारंवारता वितरण सारणीत दिले आहे.

क्र.सं.	गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या
1	0 – 5	5
2	5 – 10	7
3	10 – 15	10
4	15 – 20	6
5	20 – 25	2

(i) सामग्रीला किती गटात वर्गीकरण करता येते ?

SCERT TELANGANA

(ii) तिसऱ्या गटात किती विद्यार्थी आहेत ?

(iii) जर विद्यार्थ्यांस 10 गुण मिळाल्यास त्यांना दुसऱ्या किंवा तिसऱ्या वर्गगटात मिळविता येते का.

(iv) चवथ्या वर्ग गटातील 6 विद्यार्थ्यांचे गुण किती आहे.?

(v) पाचव्या वर्ग गटातील दोन विद्यार्थ्यांचे वैयक्तिक गुण काय आहे ?

उत्तरे

(i) सामग्रीला 5 गटात किंवा 5 वर्गात विभागले आहे.

(ii) तिसऱ्या गटात 10 विद्यार्थी आहेत.

(iii) येथे 10 ही दुसऱ्या वर्गाची वरची मर्यादा आणि तिसऱ्या वर्गाची खालची मर्यादा आहे. अशा संदर्भात वरच्या मर्यादिला वर्गात मिळवत नाही. म्हणुन 10 ला तिसऱ्या वर्गगटात मिळविल्या जाते.

(iv) चवथ्या वर्ग गटातील 6 विद्यार्थ्यांचे गुण 15 आणि 20 पेक्षा कमी

(v) विद्यार्थ्यांचे वैयक्तीक गुण या वारंवारता वितरण सारणी वरुन ओळखु शकत नाही ते 20 आणि 25 पेक्षा कमी असते.

हे करा.

एका अपार्टमेंट मध्ये राहणाऱ्या 90 वर्षाच्या लोकांचे या बाजुच्या संग्रहीत वारंवारता वितरण सारणीत दिले आहे.

वय	लोकांची संख्या
1 – 10	15
11 – 20	14
21 – 30	17
31 – 40	20
41 – 50	18
51 – 60	4
61 – 70	2

(i) सारणीत किती वर्ग गट आहेत ?

(ii) 20 - 30 या वर्गगटात किती लोक आहेत ?

(iii) त्या अपार्टमेंटमध्ये कोणत्या वयोगटातील लोक जास्त आहेत?

(iv) शेवटच्या वयोगट(61-70) तील लोकांची संख्या 61, 70 किंवा 65 आहे हे आपण सांगु शकता का ?

7.2.2मर्यादा आणि सीमा Limits and Boundaries

समजा चाचणीतील गुणाच्या माहितीची रचना करायची आहे. आपण वर्ग अवकाश 1-10, 11-20 ,..... असे बनवितो. जर विद्यार्थ्यांस10.5 गुण मिळाले असता. तो कोणत्या वर्गात येतो ? वर्ग 1-10 किंवा 11-20 ? अशा परिस्थितीत आपण खरी वर्ग मर्यादा किंवा वर्ग सीमा याचा वापर करतो.

SCERT TELANGANA

बाजुच्या तक्यात दाखविलेले वर्गाअवकाश घ्या.

वर्गांतर	
वर्गमर्यादा	सिमा
1 – 10	0.5 - 10.5
11 – 20	10.5 – 20.5
21 – 30	20.5 – 30.5
31 – 40	30.5 – 40.5

- पहिल्या वर्गाची वरची वर्ग मर्यादा आणि दुसऱ्या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा याची सरासरी ही पहिल्या वर्गाची वरची सिमा होते. आणि दुसऱ्या वर्गाची खालची सिमा होते म्हणजेच 10, 11ची सरासरी $\frac{10+11}{2} = 10.5$ होय
- आता, 10.5 च्या खालचे पुर्ण अवलोकन 1.10 या गटात येते.परंतु 10.5 हे दुसऱ्या वर्गात म्हणजेच 11.20 मध्ये येते यात सिमा 10.5 ते 20.5 आहे.
- पहिल्या वर्गाच्या अगोदरच्या वर्गाची वरची वर्गमर्यादा (नेहमी शुन्य) याची कल्पना करा आणि पहिल्या वर्गाची खालची सीमा काढा.0,1 ची सरासरी $\frac{0+1}{2} = 0.5$ येते. हीच खालची सीमा आहे.
- अशा रितीने शेवटच्या वर्गानतर येणाऱ्या वर्गाची खालची वर्ग मर्यादाची कल्पना करुन शेवटच्या वर्गाची वरची सीमा काढा. 40, 41 ची सरासरी $\frac{40+41}{2} = 40.5$ ही वरची सीमा होय.
- या सिमांना खरी वर्ग मर्यादा सुध्दा म्हणतात.

खालील वर्गाचे निरिक्षण करा.

वर्ग अवकाश	मर्यादा		सीमा	
असलग वर्ग	खालची वर्ग मर्यादा	वरची वर्ग मर्यादा	खालची वर्ग सीमा	वरची वर्ग सीमा
1-10	1	10	0.5	10.5
11-20	11	20	10.5	20.5
21-30	21	30	20.5	30.5

वर्ग अवकाश	मर्यादा		सीमा	
सलग वर्ग	खालची वर्ग मर्यादा	वरची वर्ग मर्यादा	खालची वर्ग सीमा	वरची वर्ग सीमा
0-10	0	10	0	10
10-20	10	20	10	20
20-30	20	30	20	30

वरील स्पष्टीकरणात आपणास दिसुन आले की, असलग वर्गात मर्यादा आणि सीमा वेगवेगळ्या आहेत. परंतु सलग वर्गात

SCERT TELANGANA

मर्यादा आणि सिमा सारख्याच आहेत. वर्गाच्या खालच्या सिमा आणि वरच्या सीमेमधील फरकाला वर्गाची लांबी म्हणतात. त्यास 'C' ने दर्शवितात.

हे करा

1. 30 विद्यार्थ्यांनी मारलेल्या लांब उड्या खालील तक्त्यात आहे.

अंतर (सें.मी.)	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500	501 – 600
एकुण विद्यार्थी	4	7	15	3	1

I. दिलेले वर्ग असलग वर्ग आहे का सलग वर्ग आहे ?

II. दुसऱ्या वर्गात किती विद्यार्थी आहेत ?

III. किती विद्यार्थ्यांनी 3.01 मीटर किंवा त्यापेक्षा जास्त उडी मारली ?

IV. 4.005 मीटर अंतराची उडी मारलेले विद्यार्थी कोणत्या वर्गाशी संबंधीत आहे ?

2. वरील प्रश्नातील वर्ग अवकाश सीमा माहित करा.

3. वरील प्रश्नात प्रत्येक वर्गातील अंतर किती आहे ?

7.2.3 संग्रहीत वारंवारता वितरणाची रचना :

समजा 50 विद्यार्थ्यांनी संग्रहनात्मक मुल्यांकन परिक्षेत गणितात प्राप्त केलेले गुण 31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33,41, 37,25, 22, 14,3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

माहितीचे निरिक्षण केल्यानंतर तुम्ही विचार कराल की दिलेल्या सामग्रीचे किती वर्गात वर्गीकरण कले पाहिजे? वारंवारता वितरण सारणी कशी तयार करता येईल?
खालील पायऱ्या संग्रहीत वारंवारता वितरणाची रचना करण्यासाठी मदत करतात.

पायरी 1: सामग्रीची व्याप्ती ओळखा

व्याप्ती = मोठी संख्या – लहान संख्या

= 47 – 0 = 47

पायरी 2: एकुण वर्गांची संख्या निश्चित करा.

(सामान्यता एकुण वर्ग 5 ते 8 असतात)

वर्गाची संख्या = 6

$\Rightarrow$ वर्गाचे अंतर = $\frac{47}{6} = 8$

वर्ग अवकाश गुण	ताळ्याची खुण	वारंवारता विद्यार्थी संख्या
0 – 7	~~||||~~	4
08 – 15	~~||||~~ |	6
16 – 23	~~||||~~ ~~||||~~	9
24 – 31	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13
32 – 39	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	14
40 – 47	~~||||~~	4

SCERT TELANGANA

पायरी 3: अवलोकनाच्या लहान किंमती पासुन सुरु करुन असलग वर्ग लिहा. म्हणजेच 0-7, 8-15 अशा प्रकारे

पायरी 4: ताळ्याच्या खुणेवरुन (प्रत्येक वर्गात येणारे अवलोकन मोजा) सामग्रीच्या अवलोकनाची वाटणी विविध निरनिराळ्या वर्गात करा.

पायरी 5: ताळ्याची खुण मोजुन वारंवारतेला सारणीत लिहा.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7. श्रेणीची वारंवारता वितरण सारणी बनवा.
2. संख्येच्या श्रेणीची वारंवारता वितरणाची रचना करा.

   2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25. (सुचना : असलग वर्गाचा वापर करा.)
3. वरील दोन्ही सामग्री मध्ये काय फरक आहे ?
4. कोणत्या वारंवारता वितरणातुन आपण कच्ची सामग्री पुन्हा लिहु शकतो ?

7.2.4 संग्रहीत वारंवारता वितरणाची लक्षणे.

1. ते सामग्रीला सोइस्कर आणि लहान गटात विभागने त्यास वर्ग म्हणतात.
2. 5-10 वर्गात 5 ला खालची वर्ग मर्यादा आणि 10 वरची वर्ग मर्यादा म्हणतात.
3. 1-10, 11-20, 21-30 .... अशा वर्गांना असलग वर्ग म्हणतात. कारण एका विशिष्ट वर्गाची खालची आणि वरची वर्ग मर्यादा त्याच वर्गांशी संबंधीत असते.
4. 0-10, 10-20, 21-30 ... अशा वर्गाना सलग वर्ग म्हणतात कारण एका विशिष्ट वर्गाची फक्त खालची वर्ग मर्यादा त्याच वर्गांशी संबंधीत असते. परंतु वरची वर्ग मर्यादा नसते.
5. वर्गाची वरची वर्ग मर्यादा आणि दुसऱ्या वर्गाची खालची वर्ग मर्यादा याच्या सरासरीला पहिल्या वर्गाची वरची सीमा दुसऱ्या वर्गाची खालची सीमा म्हणतात.
6. सलग वर्गात दोन्ही वर्ग मर्यादा आणि सीमा समान असतात परंतु असलग वर्गात वर्ग मर्यादा आणि सीमा नसतात.
7. वर्गाच्या वरच्या आणि खालच्या सीमेतील फरकाला वर्गाची लांबी म्हणतात.
8. सर्व अवलोकनाच्या वैयक्तिक किंमत सारणीवरुन ओळखु शकत नाही. परंतु एका विशिष्ट वर्गाच्या सर्व अवलोकनाच्या किंमतीस वर्गाची वरची सीमा आणि खालची सीमा यांची सरासरी म्हणुन गृहीत धरु शकतो. या किंमतीला मध्य किंमत (m) म्हणतात.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 12: 2010 वर्षी SSC परिक्षेत30 मुलांनी प्राप्त केलेल्या गुणांची टक्केवारी खाली दिलेली आहे.

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59. वारंवारता वितरण सारणी तयार करा. त्यासोबत तपासा. नापास (0 – 34), तृतीय श्रेणी (35 – 49), व्दितीय श्रेणी (50 – 60), प्रथम श्रेणी (60 – 74) प्राविण्य श्रेणी (75 – 100) असे वर्ग अवकाश बनवा.

सोडवणुक: वर्ग अवकाश आधिच दिलेले आहेत. म्हणुन तिसऱ्या पायरी पासुन सुरु करा.

पायरी 3: वर्ग अवकाश लिहा.

पायरी 4: हे असलग वर्ग अवकाश आहेत. लक्षात घ्या वरची वर्ग मर्यादा सुद्धा त्याचा वर्गात राहाते. ताळ्याच्या खुणा वापरुन सामग्रीच्या अवलोकनास विविध वर्ग अवकाशात वितरण करा.

पायरी 5: ताळ्याच्या खुणा मोजुन वारंवातेस सारणीत

वर्ग अवकाश गुण	ताळ्याची खुण	वारंवारता विद्यार्थ्यांची संख्या
0 – 34	|||	3
35 – 49	~~||||~~ ||	7
50 – 59	~~||||~~	5
60 – 74	~~||||~~ |	6
75 – 100	~~||||~~ ~~||||~~	9

उदाहरण 13: संग्रहीत वारंवारतेची सारणी वर्गविकाशाचा वर्ग मध्य सोबत खाली दिलेली आहे. वर्ग अवकाश माहित करा.

वर्गमध्य	7	15	23	31	39	47
वारंवारता	5	11	19	21	12	6

सोडवणुक: आपणास माहित आहे की, वर्गाची मार्क म्हणजेच त्या वर्गाचा वर्गमध्य होय. वर्गाच्या सिमा दोन क्रमवार वर्गाच्या मार्काच्या मध्ये असते.

पायरी 1: दोन लागोपाट येणाऱ्या वर्गमध्यातील फरक माहित करा $h = 15 - 7 = 8$.

(दोन लागोपाट येणाऱ्या वर्गामधील फरक सारखा आहे का माहित करा.)

पायरी 2: वर्ग मध्य m सोबत प्रत्येक वर्गाची खालची आणि वरची सिमा मोजा.

$m - h/2$ and $m + h/2$

उदाहरणार्थ पहिल्या वर्गाच्या सिमा $7 - \frac{8}{2} = 3$ किंवा $7 + \frac{8}{2} = 11$ आहेत

SCERT TELANGANA

वर्ग मध्य	वर्ग अवकाश - वर्ग	वारंवारता
7	(7 – 4) – (7 + 4) = 03 – 11	5
15	(15 – 4) – (15 + 4) = 11 – 19	11
23	(23 – 4) – (23 + 4) = 19 – 27	19
31	(31 – 4) – (31 + 4) = 27 – 35	21
39	(39 – 4) – (39 + 4) = 35 – 43	12
47	(47 – 4) – (47 + 4) = 43 – 51	6

7.3 संचित वारंवारता

स्पर्धा परिक्षेत 1000 उमेदवारांनी लेखी परिक्षा लिहिली त्याचे गुण संग्रहीत वारंवारता वितरणाच्या रुपात जाहिर केले. जे बाजुच्या सारणीत दाखविले आहे.

वर्ग अवकाश	विद्यार्थ्यांची संख्या
0 – 10	25
10 – 20	45
20 – 30	60
30 – 40	120
40 – 50	300
50 – 60	360
60 – 70	50
70 – 80	25
80 – 90	10
90 – 100	5

शरद आणि शंकर हे दोघे उमेदवार सारणी कडे पाहुन अशा प्रकारे चर्चा करीत आहे.

शरद : किती उमेदवारांनी परिक्षा लिहिली ?

शंकर: 1000 उमेदवारांनी परिक्षा लिहिली

शरद : 360 उमेदवारांनी 50-60 गुण मिळाले.

शंकर : जर कट ऑफ मार्क 60 असेल तर किती उमेदवारांना बोलविल्या जाईल.?

शरद : म्हणजे तुझ्या मते किती उमेदवारांना एकुण 60 किंवा त्यापेक्षा जास्त गुण मिळाले?

शंकर : बरोबर ते 50 + 25 + 10 + 5 म्हणजे 90 उमेदवार पात्र आहे.

शरद : परंतु तेथे 105 नौकऱ्या आहेत. कट ऑफ मार्क 50 असायला पाहिजे.

शंकर : या संदर्भात 360 + 50 + 25 + 10 + 5 म्हणजे एकुण 450 उमेदवार मुलाखतीच्या पत्रासाठी पात्र आहे.

अशा प्रकारे आपण अजुन काही निश्कर्ष काढु शकतो.

90 किंवा त्यापेक्षा जास्त मिळालेल्या उमेदवारांची संख्या (खालची सीमा) = 5

9 व्या वर्गाच्या खालच्या सिमेएवढे किंवा त्यापेक्षा जास्त मिळालेल्या उमेदवारांची संख्या = 10 + 5 = 15

8 व्या वर्गाच्या खालच्या सिमेएवढे किंवा त्यापेक्षा जास्त मिळालेल्या उमेदवारांची संख्या= 25 + 15 = 40

7 व्या वर्गाच्या खालच्या सिमेएवढे किंवा त्यापेक्षा जास्त मिळालेल्या उमेदवारांची संख्या = 50 + 40 = 90

SCERT TELANGANA

समोरील वर्गाच्या वारंवारतेला मिळविल्याने आपणास या किंमती येत आहे . याला संचीत वारंवारता म्हणतात. प्रत्येक संचित वारंवारता ही या वर्गाच्या खालच्या सिमेला समान किंवा त्यापेक्षा मोठी असते. यालाच संचित वारंवारता पेक्षा जास्त असे म्हणतात. या वारंवारतेला आपण सारणीत कसे लिहिले ते पाहु या.

वर्ग अवकाश	वारंवारता संचित उमेदवारांची संख्या	वारंवारता पेक्षा जास्त
0 – 10	25	25 + 975 = 1000
10 – 20	45	45 + 930 = 975
20 – 30	60	60 + 870 = 930
30 – 40	120	120 + 750 = 870
40 – 50	300	300 + 450 = 750
50 – 60	360	360 + 90 = 450
60 – 70	50	50 + 40 = 90
70 – 80	25	25 + 15 = 40
80 – 90	10	10 + 5 = 15
90 – 100	5	5

1. अगोदरच्या वर्गाअवकाशातील वारंवारता ही स्वता: त्याच वर्गाची संचित वारंवातरता पेक्षा जास्त आहे.
2. 9 व्या वर्गाविकाशाच्या वारंवारतेला 10 वर्गाच्या संचित वारंवारंता पेक्षा जास्त मध्ये मिळविल्यास आपणास 9 व्या वर्ग अवकाशाची संचित वारंवारता पेक्षा जास्त येते.
3. अशाप्रकारे याच पध्दतीचा वापर केल्यास उरलेल्या संचित वारंवारता पेक्षा जास्त येतात.

सामग्री मधीला अवलोकनाची एकुण संख्या जी एका विशिष्ट वर्गाची खालच्या सिमेला समान किंवा जास्त असते त्या विशिष्ट वर्गाची संचित वारंवारता पेक्षा जास्त म्हणतात.

अशा प्रकारे काही संदर्भात आपणास संचित वारंवारता पेक्षा कमी माहीत करणे जरुरी असते.

उदाहरणार्थ जर एका विशिष्ट पातळीपेक्षा कमी गुण मिळालेल्या विद्यार्थ्यांकडे शिक्षकाला थोडे जास्त लक्ष द्यायचे असल्यास आपणास संचित वारंवारता पेक्षा कमी माहित करणे आवश्यक असते.

वर्ग अवकाश (गुण)	उमेदवारांची संख्या	पेक्षा कमी संचित वारंवारता
0 – 5	7	7
5 – 10	10	10 + 7 = 17
10 – 15	15	15 + 17 = 32
15 – 20	8	8 + 32 = 40
20 – 25	3	3 + 40 = 43

1. पाहिल्या वर्गातील वारंवारतेला संचित वारंवारतेमध्ये सरळ लिहिले आहे.
2. दुसऱ्या वर्गातील वारंवारतेला पहिल्या वर्गाच्या संचित वारंवारता पेक्षा कमी मध्ये मिळविल्यास दुसऱ्या वर्गाची संचित वारंवारता पेक्षा कमी येते.

SCERT TELANGANA

3. अशा रितीने याच पध्दतीचा वापर करुन आपणास उरलेल्या संचित वारंवारता पेक्षा कमी मिळते.

सामग्री मधील अवलोकनाची एकुण संख्या जी एका विशिष्ट वर्गाच्या खालच्या सीमेपेक्षा कमी असते. त्यास विशिष्ट वर्गाची संचित वारंवारता पेक्षा कमी असे म्हणतात.

प्रयत्न करा

1. संचित वारंवारता पेक्षा कमी चा संबध _____आहे.
2. संचित वारंवारता पेक्षा जास्त चा संबंध _____ आहे.
3. खालील सामग्रीसाठी संचित वारंवारता पेक्षा कमी आणि पेक्षा जास्त लिहा.

वर्ग अवकाश	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
वारंवारता	4	7	12	5	2

4. वरील प्रश्नाची एकुण वारंवारता आणि शेवटची संचित वारंवारता पेक्षा कमी काय आहे ? तुम्ही काय अनुमान लावाल ?

उदाहरण 14: विद्यार्थ्यांचे गुणा संचित वारंवारता पेक्षा कमी वितरण सारणीत खाली दिले आहे. विविध वर्गाची वारंवारता लिहा. संचित वारंवारता पेक्षा जास्त सुध्दा लिहा. सारणीत किती विद्यार्थ्यांचे गुण दिले आहे.?

वर्ग अवकाश - गुण	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
सं.वा.पेक्षा कमी. (विद्यार्थी संख्या)	12	27	54	67	75

सोडवणुक:

वर्ग अवकाश गुण	संचित वारंवारता पेक्षा कमी	वारंवारता विद्यार्थी संख्या	संचित वारंवारता पेक्षा जास्त
1 – 10	12	12	12 + 63 = 75
11 – 20	27	27 - 12 = 15	15 + 48 = 63
21 – 30	54	54 - 27 = 27	27 + 21 = 48
31 – 40	67	67 - 54 = 13	13 + 8 = 21
41 – 50	75	75 - 67 = 8	8

सारणीत उल्लेख केलेल्या विद्यार्थ्यांची संख्या ही एकुण वारंवारता किंवा शेवटच्या वर्ग अवकाश संचित वारंवारता पेक्षा कमी किवा पहिल्या वर्ग अवकाशी संचित वारंवारता पेक्षा जास्त आहे. म्हणजेच 75 आहे.

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 7.2

1. एका कॉलोनीतील 45 व्यक्तीचे वय खाली दिलेले आहे.

33	8	7	25	31	26	5	50	25	48	56
33	28	22	15	62	59	16	14	19	24	35
26	9	12	46	15	42	63	32	5	22	11
42	23	52	48	62	10	24	43	51	37	48
36										

दिलेल्या सामग्रीचा 6 च्या वर्ग अवकाशाने संग्रहीत वारंवारता वितरण सारणी काढा.

2. शाळेतील 30 वर्ग खोल्यातील विद्यार्थ्यांची संख्या खाली दिलेली आहे. दिलेल्या सामग्रीसाठी सलग वर्ग अवकाश 4 ते (विद्यार्थी) वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

25	30	24	18	21	24	32	34	22	20	22
32	40	28	30	22	26	31	34	15	38	28
20	16	15	20	24	30	25	18			

3. संग्रहीत वारंवारता वितरणाचा वर्ग अवकाश 4 – 11, 12 – 19, 20 – 27, 28 – 35, 36 – 43 दिलेला आहे. नंतरचे दोन वर्गअवकाश लिहा. प्रत्येक वर्गाचे वर्गांतर किती आहे ? संपुर्ण वर्गासाठी वर्गाच्या सीमांना सुध्दा लिहा.प्रत्येक वर्गाचे वर्गमध्य किती आहे.

4. खालील संग्रहीत वारंवारता वितरण सारणीत वर्गमध्य दिलेला आहे.

वर्गमध्य	10	22	34	46	58	70
वारंवारता	6	14	20	21	9	5

(i) सामग्रीचा वर्ग अवकाशाची रचना करा (सलग वर्गाविकाश)

(ii) सचित वारंवारता पेक्षा कमी काढा आणि

(iii) संचित वांरवारता पेक्षा जास्त काढा.

5. सांख्यिकी मध्ये 35 विद्यार्थ्यांनी (50 पैकी)प्राप्त केलेले गुण खाली दिले आहे.

35	1	15	35	45	23	31	40	21	13	15
20	47	48	42	34	43	45	33	37	11	13
27	18	12	37	39	38	16	13	18	5	41
47	43									

समान वर्ग अवकाश घेऊन वारंवारता वितरण सारणी काढा. त्यापैकी एक दिला आहे.

10-20 (20 त्यात नाही)

SCERT TELANGANA

6. खालील वारंवारता वितरण सारणीवरुन वर्गाची सीमा काढा. आणि संचित वारंवारता पेक्षा कमी आणि संचित वारंवारता पेक्षा जास्त सारणी सुध्दा काढा.

वय	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15
मुलांची संख्या	10	12	15	13	9

7. संचित वारंवारता सारणी खाली दिलेली आहे. कोणत्या प्रकारची संचित वारंवारता दिली आहे. वैयक्तीक वर्गाची वारंवारता काढा.

धावा	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
खेळाडुची संख्या	3	8	19	25	30

8. ग्रंथालयात वाचन करणाऱ्यांची संख्या खाली दिलेली आहे. प्रत्येक वर्गाची वारंवारता लिहा. संचित वारंवारता सारणी सुध्दा लिहा.

पुस्तकांची संख्या	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
संचित वारंवारता पेक्षा जास्त	42	36	23	14	6

7.4 वारंवारता वितरणास आलेखाव्दारे दर्शविणे:

वारंवारता वितरण ही सामग्रीची अवलोकनासोबत सुव्यस्थीतता किंवा वारंवारतेची वर्गाशी व्यवस्थीत मांडणी आहे. योग्या योग्य श्रेणीचे चित्रालेख, स्तंभालेख दुहेरी स्तंभालेख आणि वृत्तालेखात वारंवारता वितरणास कसे दर्शवितात हे आपण पहिलेच शिकलो. या पाठात आपण आयतालेख शिकणार आहोत. चला पहिल्यांदा आलेखाची उजळणी करु या.

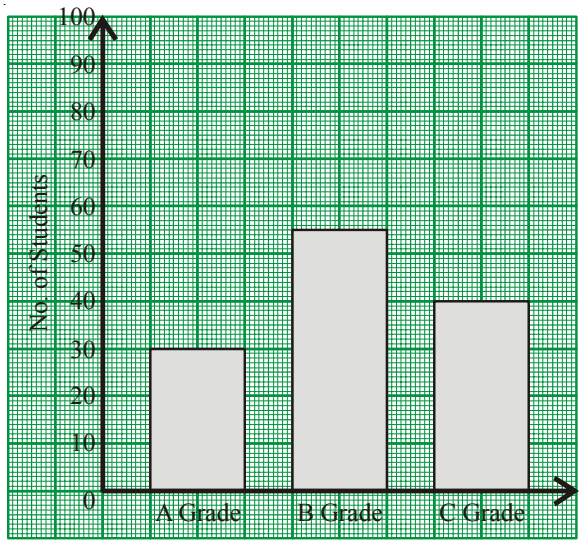
7.4.1 स्तंभालेख

एकसमान रुंदी आणि वेगवेगळी लांबी ही सर्व किंमतीशी प्रमाणात असलेल्या उभ्या किंवा आडव्या स्तंभाच्या साहाय्याने माहितीला दाखविल्यास त्यास स्तंभालेख म्हणतात.

स्तंभालेख काय दर्शविते चला पाहु या खालील उभ्या स्तंभाचा अभ्यास करा.

(i) स्तंभलेख काय दर्शविते ?

(ii) किती विद्यार्थ्यांनी A, B किंवा C श्रेणी प्राप्त केली ?



परिक्षेचे प्रमाण

SCERT TELANGANA

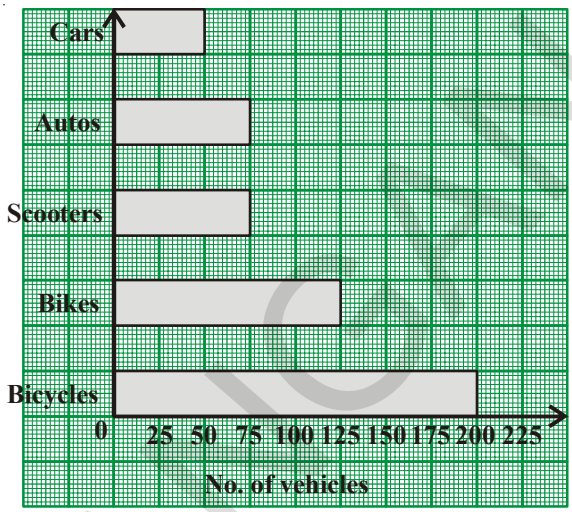
(iii) कोणती श्रेणी मुलांनी जास्त संख्येत प्राप्त केली ?

(iv) वर्गात एकुण किती विद्यार्थी आहेत ?

आलेखावरुन या प्रश्नांची उत्तरे देणे सोपे जाते.

अशा रितीने काही आलेखात स्तंभ आडवे काढले जातात.

उदाहरणार्थ दुसरा स्तंभालेखाचे निरिक्षण करा. त्यामध्ये नेल्लोर जिल्ह्याच्या संगम गावातील वाहनांची एकुण संख्यांची माहिती दिली आहे.



विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. सर्व स्तंभ (किंवा आयात) स्तंभालेखात आहेत
   (a) समान लांबीचे (b) समान रूंदीचे (c) समान क्षेत्रफळ (d) समान किंमतीचे
2. स्तंभालेखात प्रत्येक आयताची लांबी ही इतर आयताच्या लांबीवर निर्भर करते का ?
3. आयतातील किंमतीमध्ये असलेला बदल इतर आयतावर प्रभाव पाडु शकतो का ?
4. आपण उभ्या आयताकाचा आणि आडव्या आयताचा वापर कुठे करतो.

7.5 संग्रहीत वारंवारता वितरणास आलेखाव्दारे दर्शवणुक :

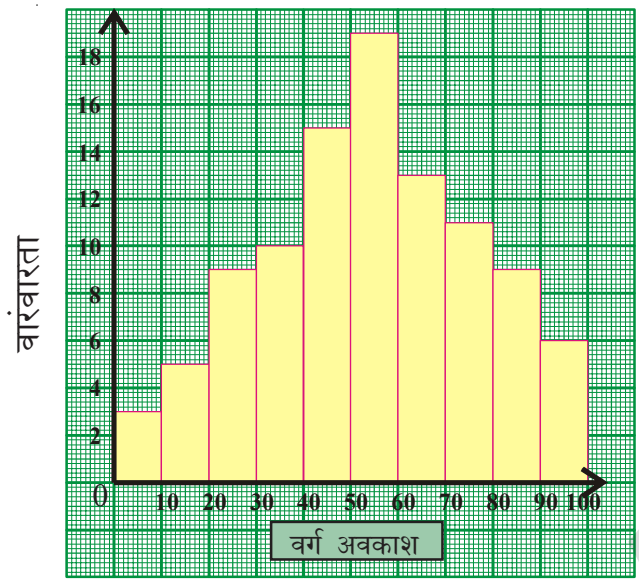
वारंवार येणाऱ्या श्रेणीचे संग्रहीत वारंवारता वितरणाचे आलेखात दर्शवणुक या बद्दल शिकु या. म्हणजेच असलग वर्ग अवकाश त्याचा पहिला प्रकार स्तंभाआलेख आहे.

7.5.1 स्तंभलेख आलेख-

7.5.1.1 स्तंभलेखाचे स्पष्टीकरण:

दिलेल्या संग्रहीत वारंवारता वितरणाच्या स्तंभलेखाचे निरिक्षण करा.

SCERT TELANGANA



वर्ग अवकाश गुण	वारंवारता विद्यार्थी संख्या
0 – 10	3
10 – 20	5
20 – 30	9
30 – 40	10
40 – 50	15
50 – 60	19
60 – 70	13
70 – 80	11
80 – 90	9
90 -100	6

(i) आलेखात किती आयतकार - स्तंभ आहेत ?
(ii) आयताच्या उंचीला कोणता प्रमाणात काढले आहे ?
(iii) सर्व आयताची रुंदी समान आहे. कारण काय आहे ?
(iv) आपण आलेखात कोणत्याही दोन आयताची अदलाबदल करु शकतो का ?

आलेखावरुन तुम्ही समजले की,

(i) 10 वारंवारतेला दर्शविण्यासाठी इथे 10 आयत आहेत.
(ii) आयताची उंची वारंवारतेच्या प्रमाणात आहेत,
(iii) आयताची रुंदी समान आहे कारण रुंदी ही वर्ग अवकाश दर्शविते. विशेषता या उदाहरणात प्रत्येक वर्गाचे वर्गांतर समान आहे.
(iv) ही सतत श्रेणीची दर्शवणुक आहे (सलग वर्ग), आपण कोणतेही दोन आयत अदलाबदल करु शकत नाही.

प्रयत्न करा.

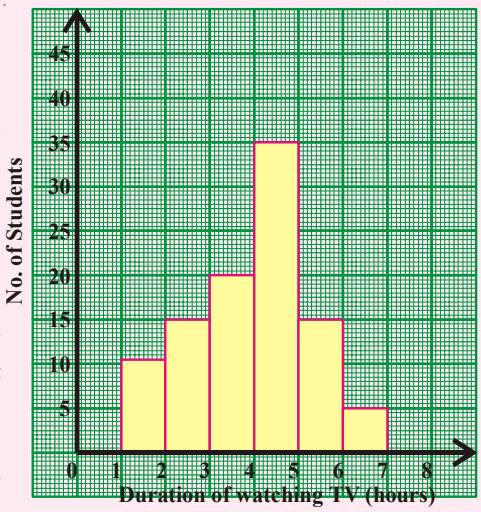
बाजुच्या स्तंभालेखाचे निरिक्षण करुन खालीलप्रश्नाची उत्तरे द्या.

(i) स्तंभालेखात कोणती माहिती दर्शविलेली आहे ?

(ii) कोणत्या गटात सर्वाधिक विद्यार्थी आहेत?

(iii) 5 तास किंवा त्यापेक्षा जास्त टी.व्ही. पाहणारे किती विद्यार्थी आहेत.?

(iv) एकुण किती विद्यार्थ्यांची पाहणी झाली?



SCERT TELANGANA

7.5.1.2 स्तंभालेखाची रचना:

एका टि.वी. वाहिणीने कोणत्या वयोगटातील व्यक्ती त्यांचे चॅनेल जास्त पाहते हे माहित करण्याचे ठरविले. त्यांनी एका अपार्टमेंट मध्ये पाहिणी केली. माहितीस या स्तंभालेखात दर्शविले आहे.

वर्ग वयोगट	वारंवारता एकुण पाहणारे	वर्ग
11 – 20	10	10.5 – 20.5
21 – 30	15	20.5 – 30.5
31 – 40	25	30.5 – 40.5
41 – 50	30	40.5 – 50.5
51 – 60	20	50.5 – 60.5
61 – 70	5	60.5 – 70.5
वर्ग मर्यादा		सीमा

पायरी 1 : जर दिलेले वर्ग असलग वर्ग (वर्गाची मर्यादा) असल्यास त्यास सलग वर्गाच्या (वर्ग सीमा) रुपात बदलवुन त्याचा निरंतर श्रेणीसाठी स्तंभालेख काढा.

पायरी 2 : x-अक्षावर योग्य प्रमाण घेऊन त्यावर वर्ग अवकाश काढा.

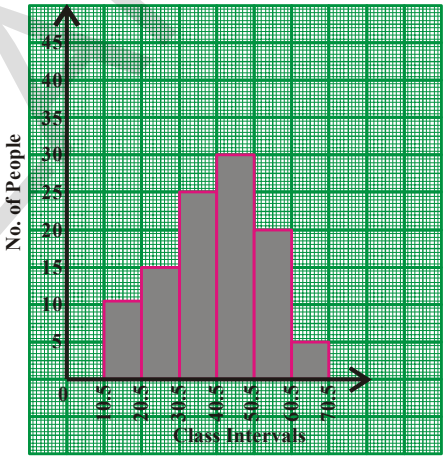
पायरी 3 : y-अक्षावर योग्य प्रमाणाची निवड करुन त्यावर वारंवारता काढा. (दोन्ही अक्षावरील प्रमाण समान असु नये)

प्रमाण : x - अक्ष 1 सें.मी. = एक वर्ग अवकाश

y- अक्ष 1 सें.मी. = 5 व्यक्ती

पायरी 4 : वर्गाला पाया समजुन आयत काढा आणि सारख्या उंचीची सारखी वारंवारता काढा.

Scale :
x- axis : 1 cm = 1 class interval
y - axis : 1 cm = 5 people



7.5.1.3 आधाराची रुंदी बदलणारा स्तंभालेख:

खालील वारंवारता वितरण सारणीत एका विशिष्ट शाळेतीलSSC परिक्षेत मिळविलेल्या गुणांची टक्केवारी दिलेली आहे.

वर्ग अवकाश (गुण) श्रेणी		विद्यार्थ्यांची संख्या
नापास	0-35	28
तृतीय श्रेणी	35-50	12
व्दितीय श्रेणी	50-60	16
प्रथम श्रेणी	60-100	44

तुमच्या लक्षात येते की, विविध श्रेणीतील मुलांचे कार्याची गुणांची सीमा प्रत्येक श्रेणीसाठी एक समान नाही.आपण सारणीचे निरिक्षण केले असता जास्त टक्केवारी मिळणारे विद्यार्थी 44 % आहे. ती वर्गांतरात 40 (60 to 100)आहे. याच वेळी 16% वर्गांतरात 10 (50 to 60) मध्ये आहे. म्हणुन इथे वर्गांतराची रुंदी सुध्दा मोजण्यात आली पाहिजे.

SCERT TELANGANA

दर वर्गांतराला वारंवारता (वारंवारता घनता) माहित करुन सर्व उंचीवरुन आयतालेख काढला पाहिजे. कोणतेही वर्गांतरास वर्गांतर एकक वारंवारता घनता माहित करण्यासाठी घेतला पाहिजे. लहान वर्गांतराला एकक वर्गांतर असे घेणे सोईस्कर राहते.

∴ आयताची बदलेली लांबी ही सारख्या वारंवारतेच्या प्रमाणात असते.

$$\text{घनता} = \frac{\text{वर्गाची वारंवारता}}{\text{वर्गाची लांबी}} \times \text{वर्गाची किमान लांबी}$$

वर्ग अवकाश गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या	वर्गांतर	आयताची लांबी
0 – 35	28	35	$\frac{28}{35} \times 10 = 8$
35 – 50	12	15	$\frac{12}{15} \times 10 = 8$
50 – 60	16	10	$\frac{16}{10} \times 10 = 16$
60 – 100	44	40	$\frac{44}{40} \times 10 = 11$

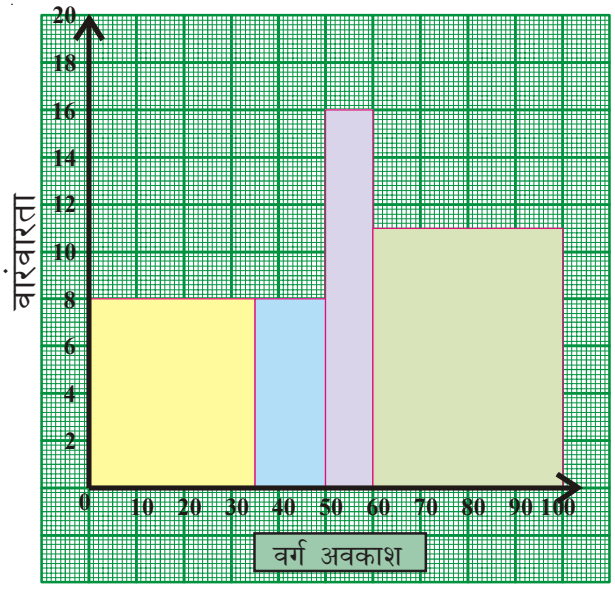
मागील उदाहरणा प्रमाणेच बदलेल्या लांबीवरुन स्तंभालेख काढता येतो

पायरी 1: X - अक्षावर योग्य प्रमाण घेऊन त्यावर वर्ग अवकाशाची खुण करा.

पायरी 2: Y-अक्षावर योग्य प्रमाण घेऊन त्यावर वारंवारतेच्या खुण करा (दोन्ही अक्षावरील प्रमाण समान नसावे)

प्रमाण : X - अक्षावर 1 सें.मी. = 1 किमान वर्ग

Y - अक्षावर 1 सें.मी. = 2 %



पायरी 3: वर्गाविकाशाच्या आधारावरुन आयत काढा आणि सारख्या वारंवारतेला उंची असे समजा.

SCERT TELANGANA

7.5.1.4 वर्गमध्या सोबत असंग्रहीत वारंवारता वितरणाचा स्तंभालेख:

उदाहरण **15:** आठवी व्या वर्गाच्या 65 विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या एकुण गुणासाठी खालील सारणीवरुन स्तंभालेखा ची रचना करा.

गुण (मध्य किंमती)	150	160	170	180	190	200
विद्यार्थ्यांची संख्या	8	10	25	12	7	3

सोडवणुक: मध्यकिंमतीवरुन वर्ग अवकाश माहित केला पाहिजे.

पायरी 1: क्रमवार येणाऱ्या दोन वर्गातील अंतर काढा. h = 160 -150 = 10.

(कोणत्याही दोन क्रमवार वर्गातील अंतर समान आहे. का माहित करा.)

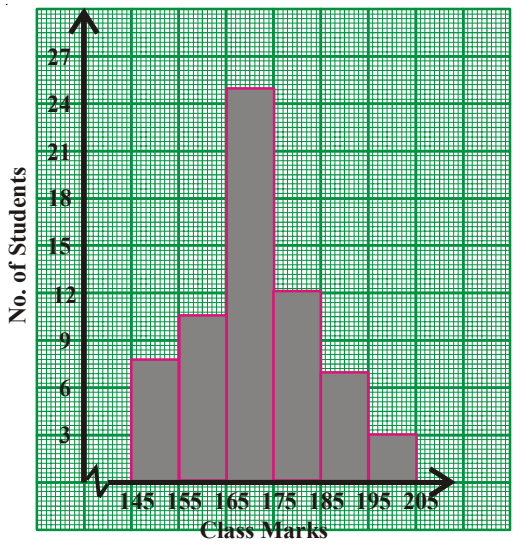
पायरी 2: वर्ग मध्य 'x''वरुन प्रत्येक वर्ग अवकाशाची खालची आणि वरची सीमा काढा ती 'x' $-\frac{h}{2}$ आणि 'x' $+\frac{h}{2}$ आहे.

पायरी 3: X – अक्षावर 1 सें.मी. = वर्ग अवकाश

Y – अक्षावर 1सें.मी. = 4 विद्यार्थी

पायरी 4: वर्ग अवकाशाच्या आधाराने आणि सारख्या वारंवारतेला उंची समजुन आयत काढा.

वर्ग मध्य (x)	वर्ग अवकाश	वारंवारता विद्यार्थ्यांची संख्या
150	145 – 155	8
160	155 – 165	10
170	165 – 175	25
180	175 – 185	12
190	185 – 195	7
200	195 – 205	3



विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

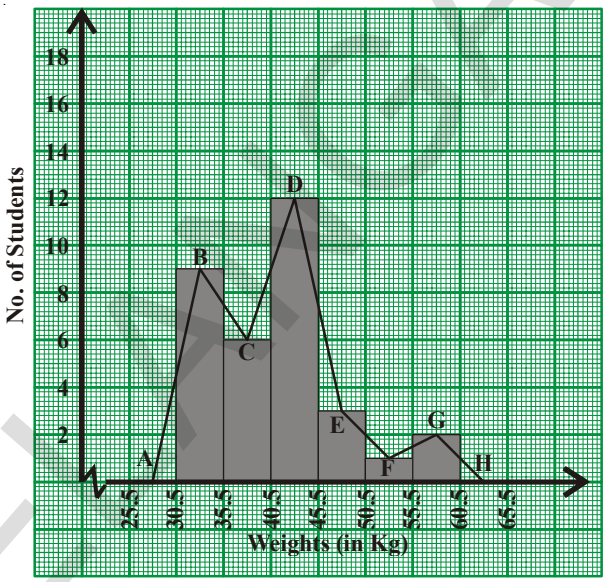
1. 'X'-अक्षावर वर्गाच्या सीमा घेतलेल्या आहेत वर्ग मर्यादा का नाही ?
2. स्तंभालेखात कोणत्या किंमती प्रत्येक आयताची रुंदी निश्चित करतात?
3. सर्व आयताच्या उंचीची बेरीज काय दर्शविते ?

SCERT TELANGANA

7.5.2 वारंवारता बहुभुजी- Polygon

7.5.2.1 वारंवारता बहुभुजी - बहुकोन स्पष्टीकरण

वारंवारता बहुकोन हा परिणाम वाचक सामग्री आणि वारंवातरतेला दर्शविणारा दुसरा उपाय आहे. चला या आलेखाचे फायदे पाहु या. बाजुच्या आयतालेखात कंपनीतील 33 व्यक्तीचे वजन दर्शविलेले आहे. रेषेच्या साहाय्याने आयतालेखातील बाजुच्या किंवा लागुन असलेल्या आयताच्या वरच्या बाजुच्या मध्य किंमतीला जोडु या. मध्य किंमती B,C,D,E,F आणिG समजुत जेव्हा आपण रेषांनी याला जोडतो तेव्हा आपणास BCDEFG आकृती येते. 30.5-35.5 च्या अगोदार आणि 55.5 - 60.5नंतरच्या वर्गाची वारंवारता शुन्य गृहीत धरु आणि त्यांचे मध्य किंमती A आणि H, अनुक्रमे गृहीत धरु ABCDEFGH हा वारंवारता बहुभुज आहे.



जरी करता खालच्या वर्गाच्या आणि वरच्या वर्गाच्या नंतर एकही वर्गनसला तरी शुन्य वारंवारता असलेल्या दोन वर्गांना मिळवुन वारंवारता बहुभुजीचे क्षेत्रफळ तयार होते. जे स्तंभालेखा ऐवढेच असते. असे का होते.?

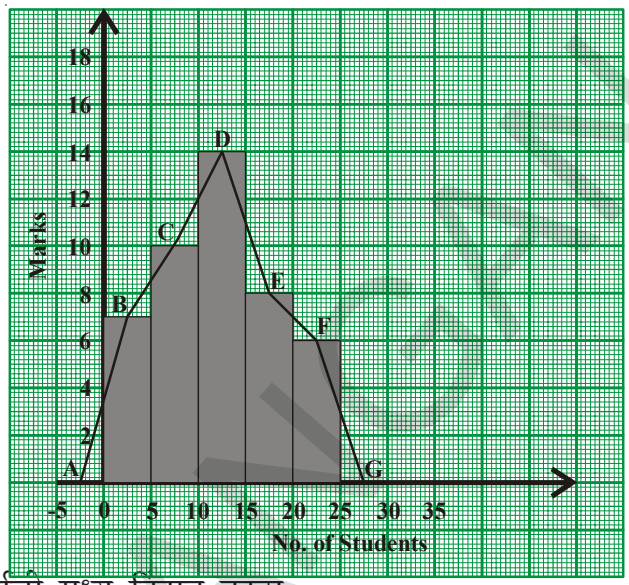
विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा:

1. पहिल्या वर्गाच्या आधी एकही वर्ग नसतांना बहुभुज आपण कसा पुर्ण करतो ?
2. सामग्रीच्या स्तंभालेखा क्षेत्रफळ आणि त्याचा वारंवारता बहुभुज समान असतात करणे सांगा.
3. वारंवारता बहुभुज काढण्यासाठी स्तंभालेखा काढणे आवश्यक आहे का ?
4. श्रृंखलेखाच्या वारंवारता वितरणासाठी वारंवारता बहुभुज काढतो का ?

7.5.2.2 वारंवारता बहुभुज ची रचना:

समजा चाचणीत एका वर्गातील 45 विद्यार्थ्यांची प्राप्त गुण(पैकी 25)घेऊन या वारंवारता वितरण सारणी सारखा वारंवारता बहुभुज काढा.

वर्ग अवकाश गुण	वारंवारता विद्यार्थी संख्या	मध्य किंमत
0-5	7	2.5
5-10	10	7.5
10-15	14	12.5
15-20	8	15.5
20-25	6	20.5
एकुण	45	



रचनेच्या पायऱ्या

पायरी 1: दिलेल्या माहितीतील प्रत्येक वर्गाची मध्य किंमत काढा.

पायरी 2: या माहितीचा स्तंभालेख काढा आणि आयताच्या टोकावर मध्यकिंमतीच्या खुण करा. (या उदाहरणात अनुक्रमे B, C, D, E, F).

पायरी 3: मध्य बिंदु यशस्वीपणे जोडा.

पायरी 4: पहिल्या वर्गाच्या आधिचा आणि शेवटच्या वर्गाच्या नंरतच्या वर्ग अवकाश गृहीत धरा. त्याच्या मध्य किंमती(A आणि H) माहित करुन अक्षावर खुण करा. (येथे 0 – 5हा पहिला वर्ग आहे. म्हणुन 0 - 5च्या अगोदराचा वर्ग माहित करण्यासाठी आडवा अक्ष नकारात्मक दिशेत वाढवुन आणि काल्पनिक वर्गाच्या (– 5 – 0) समजुन मध्य माहिती करा.

पायरी 5: पाहिला शेवटचा बिंदु B हा A ला जोडा आणि शेवटच्या बिंदु F ला G हा जोडा ज्यामुळे वारंवारता बहुभुज तयार होतो.

वारंवारता बहुभुज स्तंभालेख न काढता स्वतंत्रपणे काढु शकते यासाठी सामग्रीच्या वर्गाच्या मध्य किंमतीची गरज पडते.

हे करा.

1. खालील वारंवारता वितरणावरुन वारंवारता बहुभुजाची रचना करा.

(i) क्रिकेट सामन्यात वर्गातील विद्यार्थ्यांनी काढलेल्या धावा आहेत.

काढलेल्या धावा	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
विद्यार्थ्यांची संख्या	3	5	8	4	2

(ii) सभामंडपातील नाटकासाठी विकलेली तिकीटे

तिकीटाचे दर	10	15	20	25	30
एकुण विकलेली तिकीटे	50	30	60	30	20

SCERT TELANGANA

7.5.2.3 वारंवारता बहुभजाची लक्षणे.

1. वारंवारता बहुभुज हे वारंवारता वितरणाची आलेखीय दर्शवणुक आहे.
2. समोरील वर्गाच्या मध्य किमतीला X –अक्षावर आणि त्यासमान वारंवारतेला Y – अक्षावर घेणे.
3. माहितीसाठी काढलेला वारंवारता बहुभुजचे आणि स्तंभालेखाचे क्षेत्रफळ समान असते.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. स्तंभालेख हा वर्ग अवकाशावर वारंवारता दर्शविते. एक विशिष्ट किंमतीवर ते वारंवारता दर्शवु शकते का ?
2. एका विशिष्ट बिंदुवर वारंवारतेच्या अवलोकानाची योजना वारंवारता बहुभेज दर्शवु शकते का ?

7.5.2.4 स्तंभालेखाचा वापर न करता संग्रहीत वारंवारता वितरणासाठी वारंवारता बहुभुजीची रचना करणे.

मधुमेहाच्या रोग्यांच्या अभ्यासावरुन खालील माहिती मिळाली.

वय	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
रुग्नाची संख्या	5	9	16	11	3

आयतालेखाचा वापर न करता वारंवारता बहुभुज काढु या.

पायरी 1: विविध वर्गाचे वर्ग मध्य काढा.

पायरी 2: प्रमाण निवडा

X – अक्षावर 1 सें.मी. = 1 वर्ग अवकाश

Y – अक्षावर 1 सें.मी. = 2 गुण

पायरी 3: एका विशिष्ट वर्गाचा जर m ने त्या समोरील वारंवारतेस f ने दर्शविले असता (m, f) आलेखा वर ठेवा.

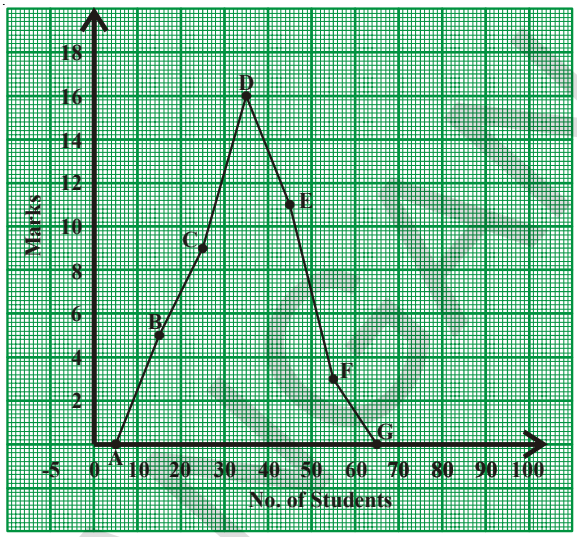
पायरी 4: क्रमवार बिंदुना क्रमाने रेषाखंडाच्या साहाय्याने जोडा.

पायरी 5: प्रत्येकी शुन्य वारंवारता असणारे एक पहिल्या वर्गाच्या अगोदर असणारा आणि दुसरा शेवटच्या वर्गानंतरचा अशा दोनवर्गाची कल्पना करा. त्याच्या मध्य किंमतीला आलेखावर खुण करा.

पायरी 6: बहुभुज पुर्ण करा.

SCERT TELANGANA

वर्ग अवकाश वय	रुग्णाची संख्या	वर्ग मध्य	क्रमीक जोडा
00 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35, 16)
40 – 50	11	45	(45, 11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.3 संग्रहीत वारंवारता वितरणाचा वारंवारता वक्र

वक्राच्या साहाय्याने माहिती दर्शविण्याचा हा दुसरा उपाय आहे.
स्तंभालेखाच्या वापर न करता वरील माहितीसाठी सामग्री वारंवारता वक्र काढु या

पायरी 1: विविध वर्गाच्या मध्य किंमती काढा.

पायरी 2: प्रमाण निवडा

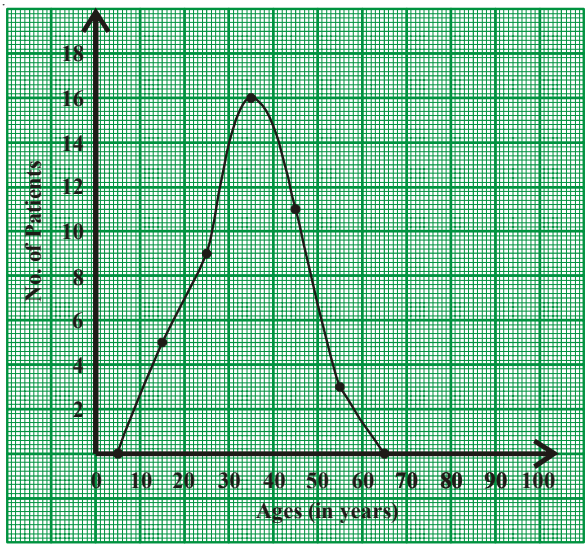
X – अक्षावर 1 सें.मी. = 1 वर्ग अवकाश

Y – अक्षावर 1 सें.मी. = 2 गुण

पायरी 3: एका विशिष्ट वर्गाच्या वर्ग मध्य x ने आणि त्या समान असलेल्या वारंवारतोला f ने दर्शविले असता(x, f) आलेखा वर काढा.

पायरी 4: क्रमवार बिंदुस वक्राचा साहाय्याने ते यशस्वीपणे जोडा

वर्ग अवकाश वय	रुग्णांची संख्या	वर्गमध्य	क्रमीक जोडी
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35,16)
40 – 50	11	45	(45,11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



SCERT TELANGANA

7.5.4. संचित वारंवारता वितरणाचा आलेख

संग्रहीत वारंवारता वितरणाच्या, वारंवातरेतच्या विरुध्द असलेल्या सर्व वर्गाची खालची / वरच्या सिमेची दर्शवुणक आलेखात आहेत. यालाच संचिता वारंवातरा वक्र म्हणतात.
हे वक्र अखंड श्रेणीच्या एका विशिष्ट पातळीवर अवलोकनाचा साठा किंवा विशेष संख्या समजण्यासाठी उपयोगी पडते.

7.5.4.1 पेक्षा कमी संचित वारंवारता वक्र

एका विशिष्ट सभ्य कामासाठी ठेकेदाराकडुन विशिष्ट विभागाने स्विकारेली निविदा संग्रहीत वारंवारता वितरण घेऊ.

वर्ग अवकाश दिवस	0 – 4	4 - 8	8 - 12	12 – 16	16 – 20
एकुण निविदा	2	5	12	10	3

पायरी 1: जर दिलेली वारंवारता वितरण असलग वर्गात असल्यास त्यास सलग वर्गात बदलने.

पायरी 2: पेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी काढा.

पायरी 3: X -अक्षावर वर्गाच्या वरच्या सिमेची खुण करुन आणि त्यात समान असलेल्या संचित वारंवारतेला Y- अक्षावर खुण करा.

प्रमाण निवडा:

X - अक्षावर 1 सें.मी. = 1 वर्ग

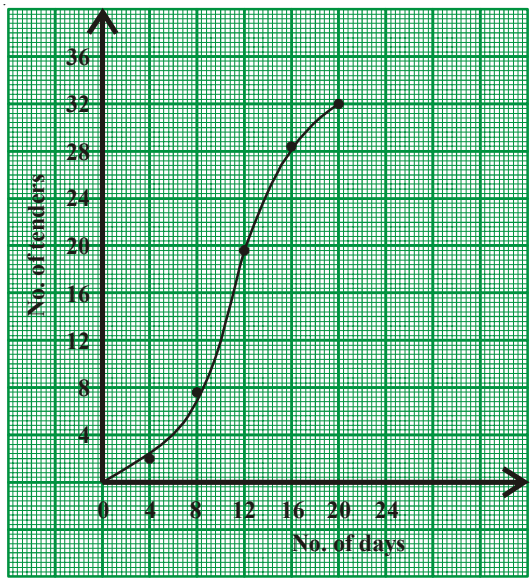
Y - अक्षावर 1 सें.मी. = 4 निविदा

वर्ग अवकाश (दिवस)	टेंडर्सची संख्या	वरची सिमा	पेक्षा कमी संचित वारंवारता
		0	0
0 – 4	2	4	2
4 – 8	5	8	7
8 – 12	12	12	19
12 – 16	10	16	29
16 – 20	3	20	32

पायरी 4: पहिल्या वर्गाची खालची सीमा (पहिल्या वर्गाच्या अगोदरच्या वर्गाची वरची सीमा) संचित वारंवारता 0सोबत काढा.

पायरी 5: अपेक्षीत संचित वारंवारता वक्र येण्यासाठी त्या बिंदुना जोडा.

अशा रितीने पेक्षामोठी संचित वारंवारता Y-अक्षावर घेऊन त्या समान खालची सीमा X-अक्षावर काढुन पेक्षा जास्त संचित वारंवारता वक्र काढु शकतो.



SCERT TELANGANA

अभ्यास - 7.4

1. खालील सारणीतील 45 विद्यार्थ्यांचं विविध पातळीवरील बुद्यांक चे वितरण दिले आहे. यावरुन माहितीचा स्तंभालेख काढा.

बुद्यांक	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
विद्यार्थी संख्या	2	5	6	10	9	8	5

2. 7 व्या वर्गाच्या वार्षिक परिक्षेत 600 विद्यार्थ्यांनी प्राप्त केलेले गुणाचा स्तंभालेखा काढा.

गुण	360	400	440	480	520	560
विद्यार्थी संख्या	100	125	140	95	80	60

3. खालील सारणीत एका कारखाण्यातील 250 मजुरांची रोजची मजुरी दिली आहे. स्तंभालेख आणि वारंवारता बहुभुज काढा

आठवड्याची मजुरी	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
मजुरदांराची संख्या	30	42	50	55	45	28

4. खालील वितरण सारणीत एका मंडळामधील प्राथमिक शाळेतील 60 शिक्षकाचे वय दिलेले आहे. यावरुन वारंवारता बहुभुज आणि वारंवारता वक्र स्तंभालेखा खेरीज काढा.

वय	24 – 28	28 – 32	32 – 36	36 – 40	40 – 44	44 – 48
शिक्षकांची संख्या	12	10	15	9	8	6

5. खालील वितरण सारणीसाठी वर्ग अवकाश आणि वारंवारता काढा संचित वारंवारता वक्र सुध्दा काढा.

प्राप्त गुण	5 पेक्षा कमी	10पेक्षा कमी	15पेक्षा कमी	20पेक्षा कमी	25पेक्षा कमी
विद्यार्थ्यांची संख्या	2	8	18	27	35

SCERT TELANGANA

आपण काय चर्चा केली.

- अंकगणितीय मध्य $= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ किंवा $\bar{x} = \frac{\sum X}{N}$ (लघु दर्शवणुक)

  इथे $\sum x_i$ ही सर्व x_i ची बेरीज आणि I ची किंमत 1 ते n आहे.
- अंकगणितीय मध्य = अंदाजे मध्य + विचनाची सरासरी किंवा $\bar{x} = A + \frac{\sum(x - A)}{N}$
- सांख्यिक माहितीच्या विश्लेषणासाठी मध्याचा वापर होतो.
- मध्यकाचा वापर सांख्यिक माहितीचे विश्लेषण करण्यासाठी विशेषता जेव्हा काही वेगवेगळी अवलोकन दिली असता होतो.
- मध्यकाचा वापर सांख्यिक माहितीचा उपयोग करण्यासाठी होतो. विशेषता जेव्हा काही अवलोकन जे असमानमध्य जे त्याच्या किंमतीवर प्रभाव पाडत नाही.
- वारंवारतेसोबत सामग्रीच्या भिन्न अवलोकनास दर्शविणाऱ्यास वारंवारता वितरण किंवा वितरण सारणी म्हणतात.
- वर्गाच्या वरच्या आणि खालच्या सिमेमधील फरकास वर्गांतर असे म्हणतात. त्यास 'C' ने दर्शवितात..
- बहुलकाच्या उपयोग सांख्यिक आणि शाब्दिक माहिती या दोन्ही साठी होतो
- बहुलक हे दिलेल्या माहितीतील वारंवार येणारे अवलोकन आहे. येथे बहुलक 1 पेक्षा जास्त असते.
- सामग्रीच्या एकुण अवलोकन एका विशिष्ट वर्गाच्या खालच्या सिमेला समान किंवा त्यापेक्षा मोठे असल्यास त्यास पेक्षा जास्त संचित वारंवारता म्हणतात.
- वर्गात पहिली किंमत आणि प्रत्येक वर्गाच्या शेवटच्या किंमतीला खालची वर्गमर्यादा आणि वरची वर्ग मर्यादा म्हणतात.

  वरच्या वर्गमर्यादा आणि पुढच्या वर्गाची खालची वर्ग मर्यादा यांच्या सरासरीला त्या वर्गाची वरची सीमा म्हणतात.
- वर्गाची खालची वर्गमर्यादा आणि अगोदरच्या वर्गाच्या खालच्या वर्ग मर्यादिला त्या वर्गाची खालची सीमा म्हणतात.
- सामग्रीतील एकुण अवलोकन एका विशिष्ट वर्गाच्या वरच्या सिमेला समान किंवा त्या पेक्षा कमी असल्यास त्यास पेक्षा कमी संचित वारंवारता असे म्हणतात.

SCERT TELANGANA

- जेव्हा संग्रहीत वारंवारता वितरणामधील वर्ग बदलत आहे. आपणास वांरवारता आणि घनतेच्या आधारावरुन स्तंभालेख काढावा लागतो.

  वारंवारता घनता =

  $$\frac{\text{वर्गाची वारंवारता}}{\text{वर्गाची लांबी}} \times \text{माहितीची वर्गाची किमान लांबी}$$

- वारंवारता बहुभुज हा वारंवारता वितरणाची आलेखीय दर्शवणुक आहे.
  - वारंवारता बहुभुज किंवा वारंवारता वक्रामध्ये समोरील वर्गाच्या मध्यकिमतीला x → अक्षावर आणि त्या समान वारंवातेला y → अक्षावर घेतात.
  - वारंवारता बहुभुज आणि स्तंभालेखाचे क्षेत्रफळ सारख्या सामग्रीसाठी सारखेच असते.
  - संग्रहीत वांरवारता वितरणाच्या संचित वारंवारतेच्या विरुध्द असलेल्या वैयक्तिक वर्गाची सारखी असलेली खालची / वरच्या सीमेची दर्शवणुक आलेखात आहे. यालाच संचित वारंवारता वक्र असे म्हणतात.
  - स्तंभालेखा हा सलग वर्गाच्या वारंवारता वितरणाची आलेखीय दर्शवणुक आहे.

हेतुपुर्वक विचार करा.

काही रेखाचित्रास चित्रांच्या माहितीचे निरिक्षण करुन व्यक्तीची विचार सारणी, अंतर दृष्टीवर निर्भर राहते. खालील आकृत्या पाहुन खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. उत्तरांचा पडताळा करा.

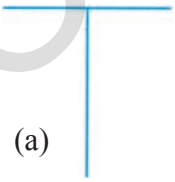
(a) कोणती लांब, उभी किंवा अडवी रेषा आहे?

(b) l आणि m रेषा सरळ आणि समांतर आहेत का?

(c) कोणता रेषाखंड लांब आहे. $\overline{AB}$ किंवा $\overline{BC}$

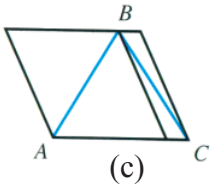
(d) बहुभुजीला किती बाजु असतात? तो चौरस आहे का?

(e) कागदाचा बाहेर चार स्तंभ वर येत असलेले तुम्ही पाहु शकता का? काही लहान स्तंभ सुध्दा आहे का ? ते सांगा?



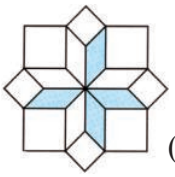
(a)

(b)



(c)

(d)



(e)

SCERT TELANGANA

धडा 8

भुमितीय आकृत्यांचा शोध लावणे

8.0 प्रस्तावणा

दैनंदिन जिवनात भुमितीच्या निरनिराळ्या कल्पना आपल्या समोर आढळतात. वस्तु आणि कार्याचा भुमीतीशी प्रत्यक्ष आणि अप्रत्यक्ष पणे संबंध असतो. या वस्तुंना किंवा कार्यात भुमीतीय गुणधर्म आणि उपयोजन असतात.

खालील चित्राकडे पहा. यात कोणकोणत्या भुमीतीय आकृत्या आणि नमुने आहेत. तुम्हाला काही समान आकाराच्या सारख्या स्वभावाच्या आढळुन येते. यापैकी काही एकरुप आणि काही जमीनीवर पसरविणारे भुमीतीय नमुने आहेत.

अशा एकरुप आकारास, सारख्या आकारास आणि सममीत आकारास किंवा चित्रातील नमुन्यास तुम्ही ओळखु शकता का ?

आकृती **8.1 (a)**

आकृती **8.1(b)**

चित्रातील खिडक्याच्या आकार एकरुप आहे, त्रिकोणाकार पुढील भागाचे (Elevation)चित्र सारखे आहे आणि जमीनीवर पसरणाऱ्या फरशीचे नमुने सममीत आकृतीचे आहे.

या भुमितीय आकाराच्या सिध्दांताचा आणि नमुन्याचा आपल्या दररोजाच्या जीवनावर कसा प्रभाव पडतो याचा अभ्यास करु.

SCERT TELANGANA

8.1 एकरुपता

सारखे आकार आणि रुप असलेल्या विविध वस्तु आपल्या दररोजच्या जिवनात वापरत असतो. त्या तुम्ही पाहिल्याच असतील उदाहरणार्थः पंख्याचे पाते सारख्या आकाराचे आणि सारख्याच रुपाचे असतात.

आकृती. 8.2

दररोजच्या जिवनातील आकाराच्या एकरुपतेचे दुसरे उदाहरण

वाद्यांच्या दुकानात जाऊन सीडी ला पहा. तुम्हाला काय लक्षात येते ?

सीडी च्या आकार आणि रुप सारखेच असतात. ते एकावर एक ठेवल्यास ते अचुक पणे एकमेकांवर झाकल्या जाते. सीडी चा दिसणारा भाग एकदुसऱ्यास एकरुप असतो. असे आपण म्हणु शकतो.

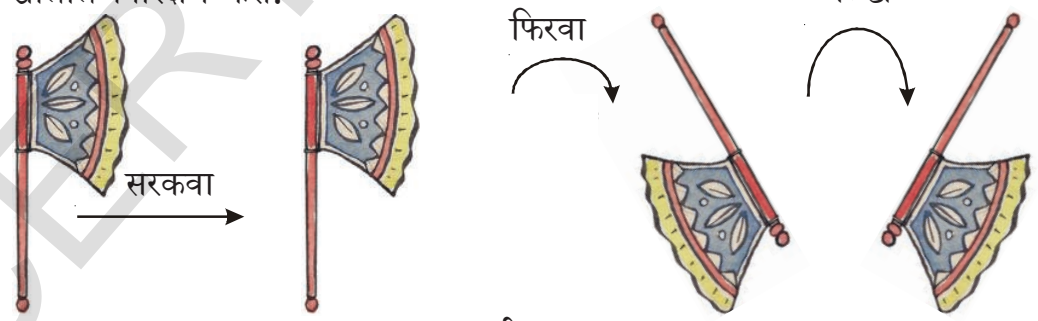
आता पोस्ट कार्ड ला एकमेंकांवर ठेवा. सर्व पोस्टकार्ड एकाच आकाराचे आणि रुपाचे असते हे तुम्हास माहित होते. सर्व एकमेकांस एकरुप असतात.

एकरुप दिसणाऱ्या तिन वस्तुंची नांवे द्या.

आकाराची एकरुपता

खालील निरिक्षण करा.

(i)



आकृती 8.3

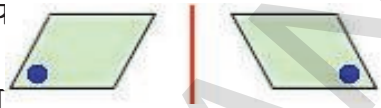
वरील आकृतीत त्याच्या स्थितीला सोडुन सर्व चित्र सारखी वस्तु दर्शविते का ?

येथे सारखी आकृती हालविल्यास, वाटोळे फिरविल्यास, झटका दिल्यास आपणास तिच आकृती येते. ते सारखे हातपंखे दर्शवितात.

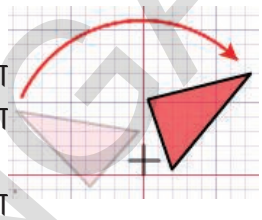
जर आपण सर्व आकृत्यांना एकावर एक ठेवल्यास काय मिळते.?

SCERT TELANGANA

ते अचुकपणे एकमेकांवर झाकल्या जाते. म्हणजेच त्याच्या आकार आणि रुप सारखेच आहे. कोणत्या सारख्या आकाराच्या आणि रुपाच्या आकृतीची उजळणी केली तुम्हाला आठवण राहते काय? सारख्या आकाराच्या आणि रुपाच्या आकृत्यांना एकरुप आकृत्या म्हणतात.



फिरवणे: फिरवणे हे एक परिवर्तन आहे ज्यामध्ये प्रतलीय आकृत्या फिरविल्या जातात. किंवा रेषेवरुन परार्वतित होऊन मुळ आकृतीची प्रतिमा तयार होते.

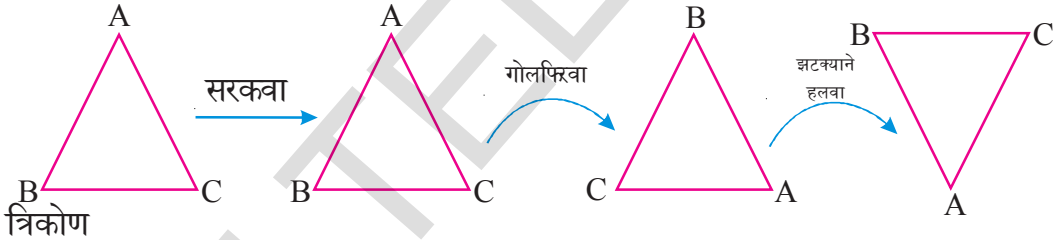


आकृतीला फिरविल्यानंतर किंवा परार्वतनानंतर परार्वतन रेषा आणि मुळ आकृतीच्या प्रत्येक बिंदु मधील अंतर हे परार्वतन रेषा आणि प्रतिमेच्या सारख्या बिदुमधील अंतराऐवढेच असते.

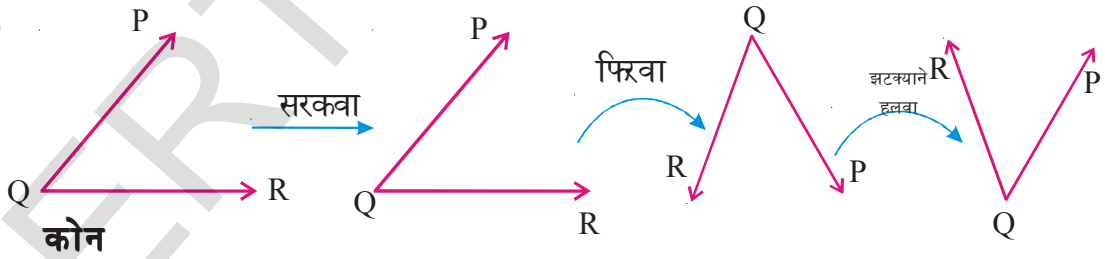
भ्रमण : भ्रमण म्हणजे कंद्र भोवती फिरणे केंद्रबिदुपासुन आकाराच्या कोणत्याही बिदुंवरील अंतर सारखेच राहते. केंद्राभोवती प्रत्येक बिंदुने वर्तुळ तयार होते. येथे केंद्रबिंदु स्थिर असतो. आणि प्रत्येक त्या बिंदु भोवती वर्तुळाकार फिरतात. पुर्ण भ्रमण हे 360^0 असते

आता, खालील भुमीतीय आकृत्याचे निरिक्षण करा.

(i)



(ii)



सर्व संदर्भात जर रांगेतील पहिल्या आकृतीला सरकविल्यास, वेटोळे फिरवल्यास आणि झटक्याने हलविल्यास त्याच्या आकारात आणि रुपात काही बदल घडतो का ? नाही, प्रत्येक रांगेतील आकृती एकरुप आहेत. ते सारख्या आकृत्या दर्शवितात परंतु त्यांची स्थीती वेगवेगळी असते.

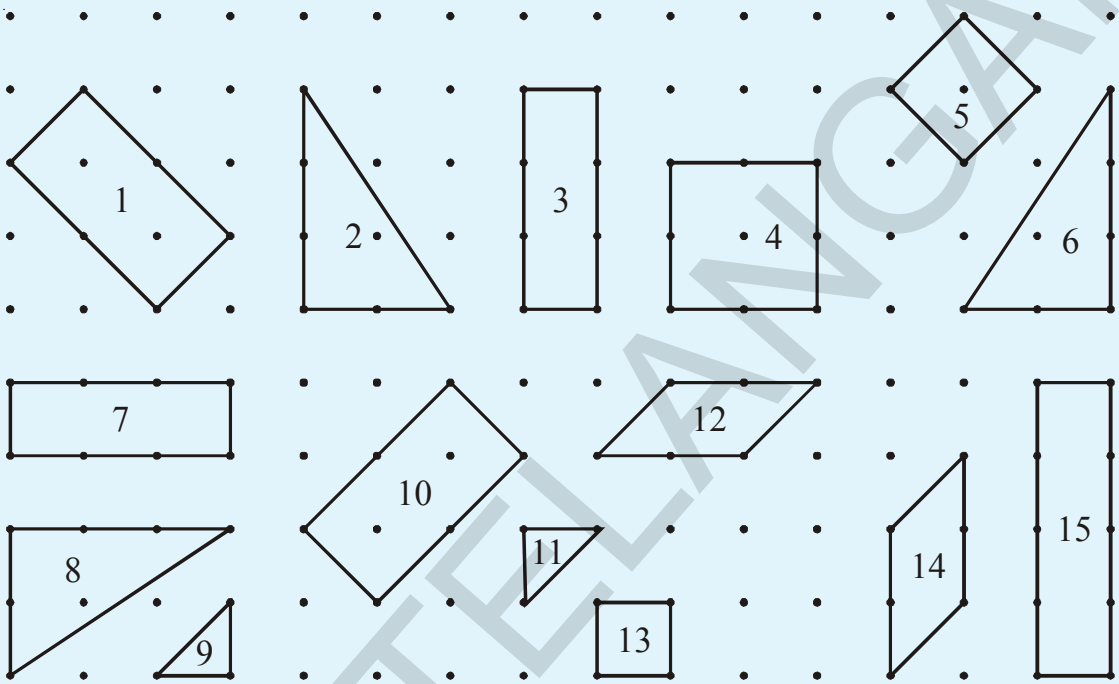
जर दोन आकार एकरुप आहेत. त्यांना सरकविल्यास वेटोळे फिरविल्यास तरी त्या एकरुप असतात. आकार नेहमी एकरुप असतो त्यांना आरशा समोर ठेऊन त्यांची आरशातील प्रतिबिंब पाहा.

या एकरुपतेला आपण $\cong$ या चिन्हाने दर्शवितो.

SCERT TELANGANA

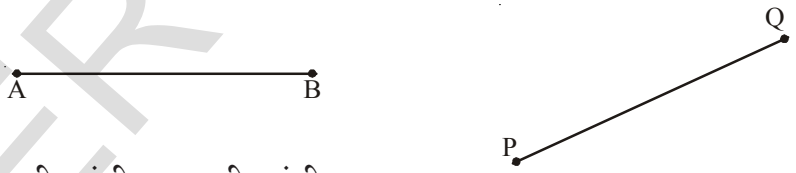
हे करा

खालील पैकी कोणत्या आकृतीची जोडी एकरुप आहे ओळखा



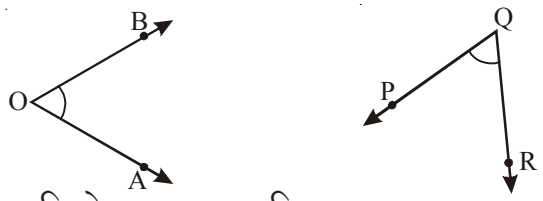
दोन (a) रेषाखंड (b) कोन आणि (c) त्रिकोण केव्हा एकरुप असतात तुम्ही सांगु शकता का ?

(a) आपणास माहित आहे की दोन रेषाखंड एकरुप असतात जेव्हा त्यांची लांबी समान असते.



ABची लांबी = PQ ची लांबी: तर AB ≅ PQ

(b) दोन त्रिकोण एकरुप असतात जेव्हा त्यांची मापे समान असतात.



(c) दोन त्रिकोण ΔABC आणि ΔPQR एकरुप असतात जेव्हा त्यांच्या सारख्या बाजुच्या जोड्या किंवा त्यांचे सारखे कोन समान आसतात.

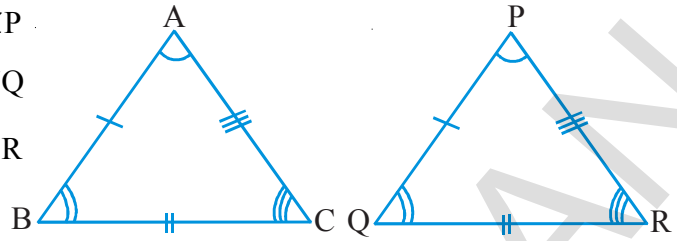
SCERT TELANGANA

म्हणजे $AB = PQ$ आणि $\angle A = \angle P$

$BC = QR$ $\angle B = \angle Q$

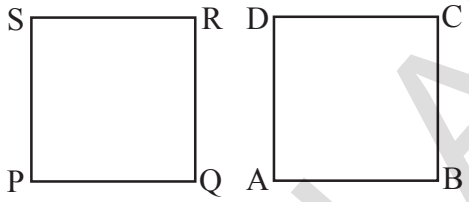
$CA = RP$ $\angle C = \angle R$

$\Delta ABC \cong \Delta PQR.$



आता, दोन बहुभुजी समान आहेत हे तुम्ही कसे सांगाल?

चला उदाहरण घेऊन त्यांची चर्चा करु या. समजा दोन चौरस □ABCD आणि □PQRS आहेत. समजा आपण एक चौरस □ABCD दुसऱ्या □PQRS चौरसावर ठेवला असता ते एकमेकांस अचुकपणे झाकतात.

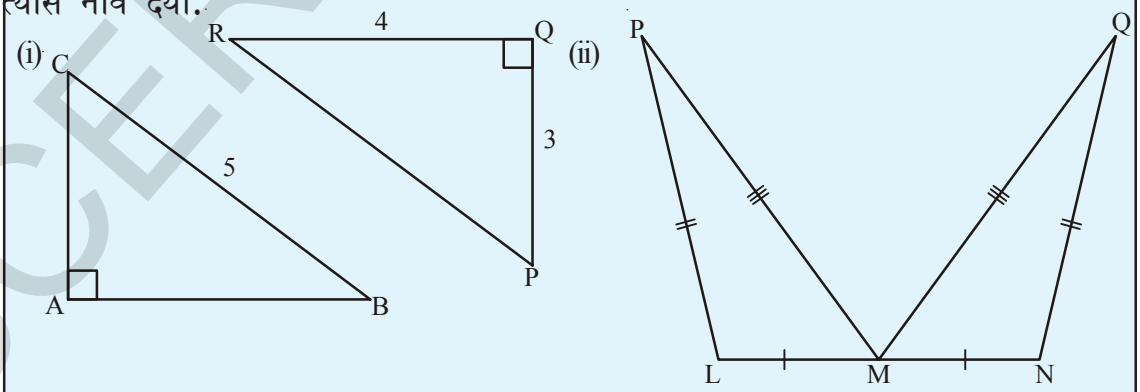


म्हणजे त्यांच्या कडा एकमेकांवर आल्या पाहिजे तरच आपण सांगु शकतो की दोन्ही चौरस एकरुप आहेत.

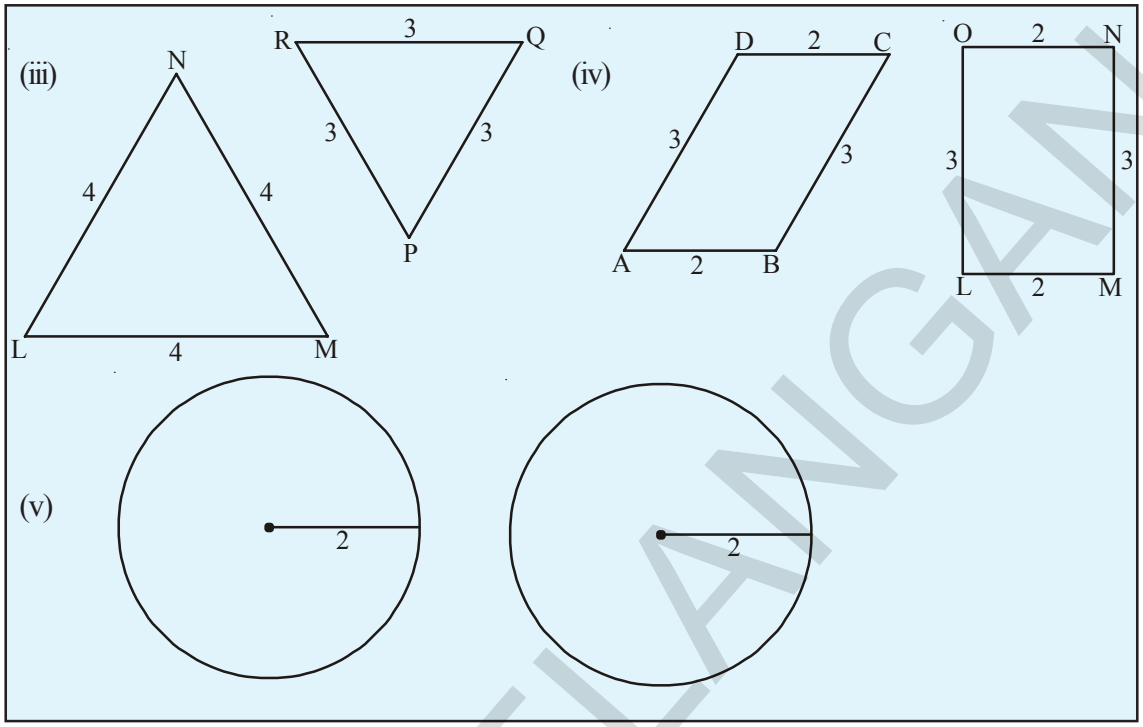
अशा प्रकारे भुमितीय आकार एकरुप असतात. जर ते एकमेकांवर अचुक पणे झाकतात.जर दोन भुहुभुजी एकरुप असल्यास त्याच्या सारख्या बाजु सारखे कोन समान असतात.

हे करा

खालील आकृतीच्या जोड्या पहा आणि ते एकरुप आहेत का माहित करा. कारणे द्या. त्यास नावे दया.



SCERT TELANGANA



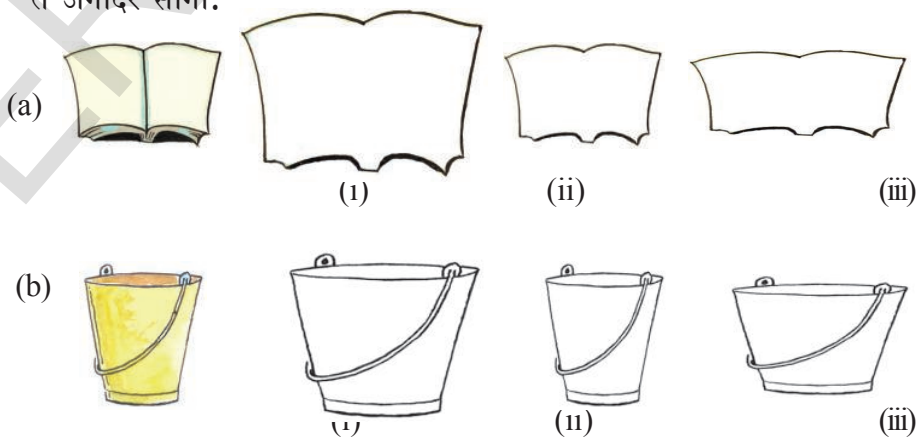
सारखे रुप/आकार

आपल्या पुस्तकात आपल्या सभोवतालच्या अनेक वस्तुंचे चित्र असतात. उदाहरणार्थ हत्तीचे चित्र, वाघ, मोठ्या ईमारतीच्या पुढील भागाचे चित्र मायक्रोचिपची ब्लॉक आकृती इत्यादी.

ते त्याच्या खऱ्या आकारात काढले आहे का ? नाही, हे शक्य नाही त्यापैकी काही मुळ वस्तुपेक्षा लहान आणि काही मोठे काढल्या आहेत.

हे करा

1. रेषांनी काढलेल्या आकृतीस ओळखा आणि त्यापैकी कोणत्या सारख्या आहेत ते अगोदर सांगा.

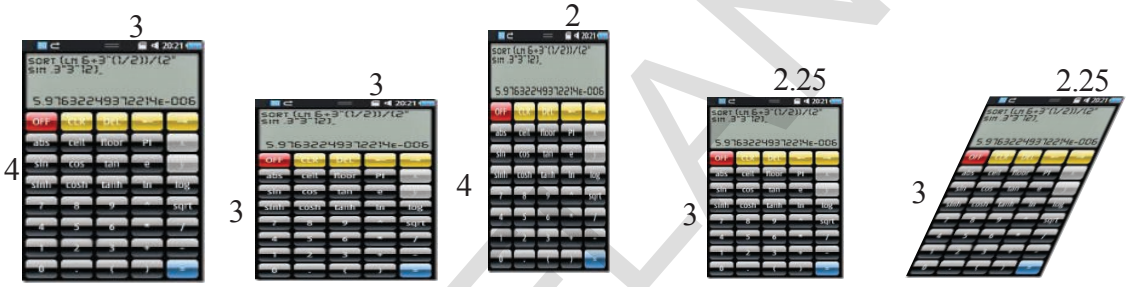


SCERT TELANGANA

झाडाची आकृती कागदावर काढलेली आहे. आता, आपण काढेलेली आकृती ही मुळ आकृती सारखी आहे हे कसे सांगु शकता.

मुळ आकृती **काढलेली आकृती**

चला माहित करु, येथे एक वस्तु जी निरनिराळ्या रितीने कमी होत आहे. खालील पैकी कोणती कमी झालेली आकृती मुळ आकृती सारखी दिसते ते सांगा ?



मुळ वस्तु कपात -1 कपात - 2 कपात- 3 कपात -4

त्याच्या परिणामानाचे निरिक्षण केले असता कपात-3 ही मुळ वस्तु सारखी दिसते कारण सांगा ? आता, मुळ वस्तुच्या आणि कपात -3 यांच्या संगत बाजुचे गुणोत्तर माहित करा. तुमच्या लक्षात काय येते ?

$$\frac{\text{मुळ लांबी}}{\text{कमी केलेली लांबी-3}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{मुळ रुंदी}}{\text{कमी केलेली रुंदी-3}} = \frac{3}{2.25} = \frac{3\times4}{2.25\times4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

आपणास दिसुन आले की, सारख्या बाजुचे गुणोत्तर समान आहेत.

येथे सर्व संगत कोन काटकोन आहेत आणि समान आहेत.

म्हणुन निश्कर्ष काढु शकतो की, दोन बहुभुजी सारखे असतात जर त्याचे संगत कोन एकरुप आणि संगत बाजु प्रमाणात आहेत.

कपात झालेल्या सर्व संगत बाजुचे गुणोत्तर सुध्दा काढा.

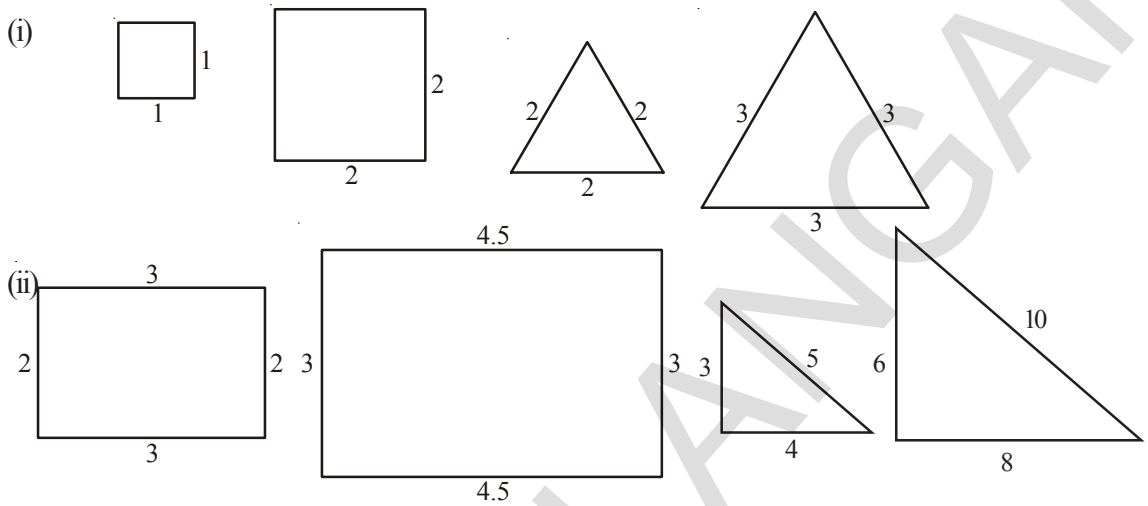
सारखेपणाचे उपयोजन आपणास कुठे आढळते ?

इंजीनियर ने बांधणाऱ्या इमारतीच्या पुढील भागाचे नकाशा काढला. डीटीपी चे काम करणाऱ्याने कंप्युटर मध्ये आकृती काढुन त्यास बॅनर बनविण्यासाठी एका प्रमाणात मोठी केली.फोटोग्राफरने अनुपाताच्या नियामावरुन त्या चित्रास मोठे आणि लहान करुन प्रींट काढली. विज्ञानाचे उपकरणाची आकृती, नकाशे हे प्रमाणात काढलेले असतात म्हणजे मुळ वस्तु सारखे असतात.

SCERT TELANGANA

सारखेपणाची तपासणी

खालील सारख्या आकृतीच्या जोडीचे निरिक्षण करा. त्यांच्या बाजु मोजुन संगत बाजु मधील गुणोत्तर माहित करा. संगत कोन सुध्दा माहित करा. तुम्हाला काय दिसुन येते. ?



मागील पानावर दिलेल्या आकृतीच्या आधारावरुन खालील तक्ता पुर्ण करा.

संगत बाजुंचे गुणोत्तर	संगत कोन
(i) चौरस $= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(90^o, 90^o, 90^o, 90^o) = (90^o, 90^o, 90^o, 90^o)$
(ii) समभुज त्रिकोन $= \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$(60^o, 60^o, 60^o) = (60^o, 60^o, 60^o)$
(iii) आयत $= \frac{2}{3} =$	$(90^o, 90^o, 90^o, 90^o) = (90^o, 90^o, 90^o, 90^o)$
(iv) काटकोन त्रिकोन $= \frac{3}{6} =$	(....., ..., ...,) = (....., ..., ...,)

या उदाहरणातील प्रत्येक जोडीत संगत, बाजुचे गुणोत्तर समान आहे आणि संगत कोणाची जोडी समान आहे.

दुसरे उदाहरण घेऊ

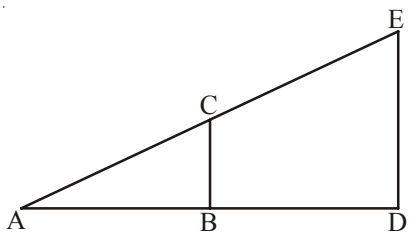
बाजुच्या आकृतीत दोन सारखे त्रिकोन ΔABC आणि ΔADE आहेत. यास आपण $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ असे लिहितो. यास एकमेंकावर ठेवले असता तुम्हाला दिसुन येते की, संगत कोनाची जोडी समान असतात.

संगत कोनाची जोडी समान असते.

(म्हणजेच) $\angle A \cong \angle A$

$\angle B \cong \angle D$ (का?)

$\angle C \cong \angle E$ (का?)



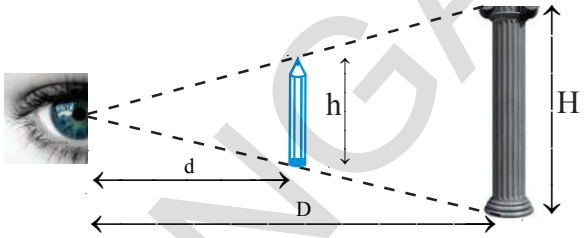
SCERT TELANGANA

संगत बाजुचे गुणोत्तर समान असते.

(म्हणजेच) $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

त्रिकोनाच्या एकरुपतेच्या नियमात दुर असलेल्या वस्तुंची उंची माहित करण्यासाठी कसे उपयोगी पडते उदाहरणात पाहु.

स्पष्टीकरण: एका जागेवरुन काही दुर अंतरावर एक मुलगी तीच्या समोरील खांबाकडे तिचा हात ताठ करुन एक पेन्सील घेऊन उभी आहे. ती तीच्या हातातील पेन्सीलला खाबांच्या बरोबर धरुन आकृतीत दाखविलेले पाहिले. त्याची वरील उदा. शी तुलना केल्यास



$$\frac{\text{खांबाची उंची}}{\text{पेन्सीलची लांबी}} = \frac{\text{मुली पासुन खांबाचे अंतर}}{\text{खांद्याची लांबी}}$$

पेन्सीलीची लांबी, हाताची लांबी आणि खांबाचे अंतर मोजले असता आपण खांबाच्या उंचीचा अंदाज लावु शकतो.

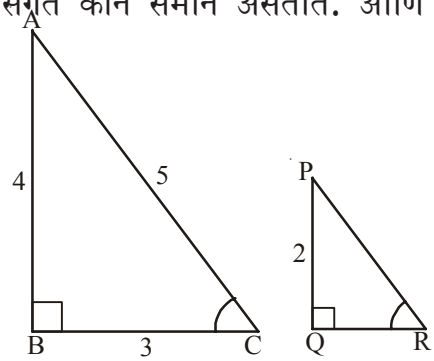
प्रयत्न करा

तुमच्या हाताने एक मोजपट्टी उभी धरुन हात समोर सरळ करा आणि तुमच्या शाळेची इमारत झाकण्याचा प्रयत्न करा.(इमारती पासुन तुमचे अंतर सोईस्कर करा)आकृती काढा आणि शाळेच्या इमारतीच्या उंचीचा अंदाज लावा.

उदाहरण 1: बाजुच्या आकृतीत $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, आणि $\angle C = 53^0$. बाजु PR आणि $\angle P$ माहित करा.

सोडवणुक: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

जेव्हा दोन त्रिकोण सारखे असतात त्यांचे संगत कोन समान असतात. आणि संगत बाजु प्रमाणात असतात.



$$\frac{PR}{AC} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{PR}{5} = \frac{2}{4}$$

$$PR = \frac{2}{4} \times 5 = 2.5$$

पुन्हा $\angle R = \angle C = 53^o$

SCERT TELANGANA

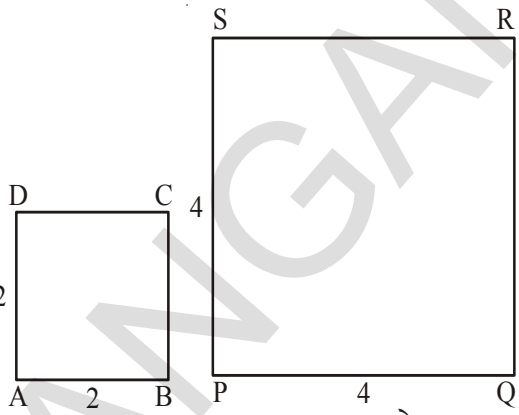
त्रिकोणातील तिन्ही कोनांची बेरीज 180° असते

म्हणजेच $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

$\angle P + 90^o + 53^o = 180^o$

$\angle P = 180^o - 143^o = 37^o$

उदाहरण 2: वेगवेगळ्या बाजु असलेले दोन चौरस काढा. ते सारखे आहे हे तुम्ही सांगु शकता का ? स्पष्ट करा, त्यांची परिमीती आणि क्षेत्रफळ आणि गुणोत्तर काढा. तुमच्या लक्षात काय येते ?



सोडवणुक: 2 सें.मी. आणि 4 सें.मी. बाजु असलेले दोन चौरस काढा. सर्व बाजु प्रमाणात आहेत.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

संगत कोनाच्या सर्व जोड्या 90° आहेत.

> संगत बाजुचे गुणोत्तर हे त्याच्या परिमीतीच्या गुणोत्तरला समान असते

चौरस ABCD ~ चौरस PQRS

□ABCD चौरसाची परिमीती $= 4 \times 2 = 8$ सें.मी.

□PQRS चौरसाची परिमीती $= 4 \times 4 = 16$ सें.मी.

त्याच्या परिमीतीचे गुणोत्तर $= 8 : 16 = 1 : 2$

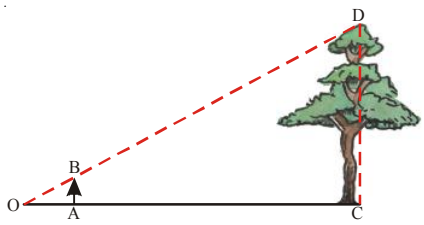
ABCD चौरसाचे क्षेत्रफळ $= 2 \times 2 =$ 4 सें.मी.^{2}

PQRS चौरसाचे क्षेत्रफळ $= 4 \times 4 =$ 16 सें.मी.^{2}

त्याच्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर $= 4 : 16 =$ $1 : 4 = 1^2 : 2^2$

= चौरसाच्या संगत बाजुचे गुणोत्तर

उदाहरण 3: जगदिशने झाडापासुन 1 मीटर अंतरावर मोजपट्टीला उभे धरून झाडाच्या उंचीला झाकुण त्याच्या उंचीचा अंदाज लावण्याचा प्रयत्न केला आणि आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे काढली. झाडाचे मोजपट्टी माप त्या मोजपटट्टीवर 85 सें.मी. आहे. आणि त्याच्या पासुन झाडाचे अंतर 15 मीटर आहे. झाडाची खरी उंची काढा.



सोडवणुक: आकृतीवरुन $\Delta OAB \sim \Delta OCD$

सारख्या दोन त्रिकोणाच्या संगत बाजु प्रमाणात आहेत.

SCERT TELANGANA

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$$

$$\therefore \frac{1}{15} = \frac{0.85}{CD} \Rightarrow CD = 0.85 \times 15 = 12.75 \text{ मी.}$$

$\therefore$ झाडाची उंची $= 12.75$ मी.

8.2 एकसारखा विस्तार:

कधी कधी आपणास आकृत्या मोठ्या कराव्या लागतात आणि कधी कधी नकाशा काढतांना लहान कराव्या लागतात. इर्थ प्रत्येक संदर्भात आकृत्या मुळ आकृत्या सारख्याच असल्या पाहिजे. याचा अर्थ दररोजच्या जिवणात आपणास मोठ्या किंवा लहान सारख्या आकृत्या काढणे आवश्यक आहे.अशा पध्दतीने मोठ्या किंवा लहान सारख्या आकृत्या काढल्यास त्यास एक सारखा विस्तार म्हणतात.

खालील विस्तार ABCD, चे निरिक्षण करा हा आलेखाचा कागदावर काढलेला आयत आहे. प्रत्येक शिरोबिंदु A, B, C, D चिन्ह 'O' पासुन जोडल्या आहेत आणि अनुक्रमे A^1, B^1, C^1 आणि D^1 पर्यंत दुप्पट लांबीने वाढवले आहे देते. नंतर A^1, B^1, C^1, D^1जोडल्यास आयत तयार होतो. जो ABCD च्या बाजुस दोन पट मोठा करतो इथे O ला विस्ताराचे केंद्रबिंदु म्हणतात.

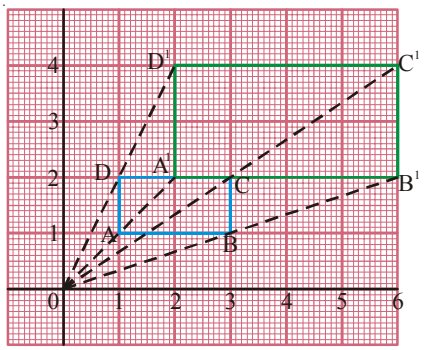
आणि $\frac{OA^1}{OA} = \frac{2}{1} = 2$ ला मोज घटक 'k' म्हणतात.

हे करा.

1. आलेखाच्या कागदावर त्रिकोण आणि मोज घटक 3 ने त्याचा विस्तार काढा. या दोन्ही आकृत्या सारख्या आहेत का ते पहा ?
2. कोणत्याही दुसऱ्या आकृतीसाठी पुढे आलेला भाग वाढविण्याचा प्रयत्न करा आणि मोज घटक 4.5 घेऊन चौरस काढा. तुमच्या लक्षात काय येते ?

8.2.1 एक सारख्या विस्ताराची रचना करणे

उदाहरण 4: मोजपट्टी आणि कंपासच्या सहाय्याने त्रिकोण k = 2असतांना विस्ताराची रचना करा.



सोडवणुक:

पायरी 1: Δ PQR काढा आणि विस्ताराचा केंद्रबिंदु C निवडा जो त्रिकोणावर नाही. त्रिकोनाचा प्रत्येक शिरोबिंदु C पासुन जोडा आणि समोर वाढवा

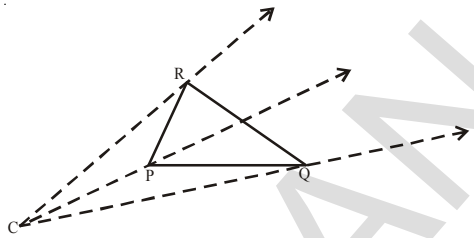
SCERT TELANGANA

पायरी 2: कंपासाच्या सहाय्याने तीन बिंदु P^1, Q^1आणि R^1 रितीने वाढवा की,

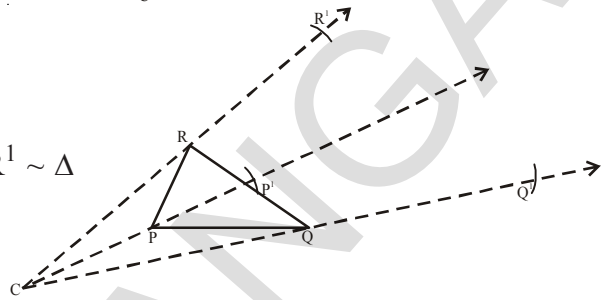
$CP^1 = k\,(CP) = 2\,CP$

$CQ^1 = 2\,CQ$

$CR^1 = 2\,CR$



पायरी 3: P^1Q^1, Q^1R^1 आणि R^1P^1 जोडा लक्षातघ्या $\Delta\, P^1Q^1R^1 \sim \Delta\, PQR$



अभ्यास - 8.1

1. तुम्ही रोज वापरणाऱ्या 5 एकरुप जोडयांच्या वस्तुंची नांवे लिहा.
2. (a) दोन एक रुप आकृत्या काढा त्या सारख्या आहे का पहा ? स्पष्ट करा

   (b) दोन सारखे आकार घ्या, जर तुम्ही त्यास वाटोळे फिरविल्यास किंवा त्यापैकी एक झटक्याने हलविल्यास सारखेपणा राहतो का हे पाहा आणि स्पष्ट करा ?
3. जर $\Delta\, ABC \cong \Delta\, NMO$ एकरुप कोनांची बाजुंची नांवे लिहा
4. खालील विधान सत्य आहे का सांगा.कारणे स्पष्ट करा.

   (i) प्रत्येक 3 सें.मी. बाजु असलेले दोन चौरस त्यापैकी एक 45° वाटोळे फिरविल्यास एकरुप असतात.

   (ii) कर्ण 5 सें.मी. असणारे दोन काटकोन त्रिकोण एकरुप असतात.

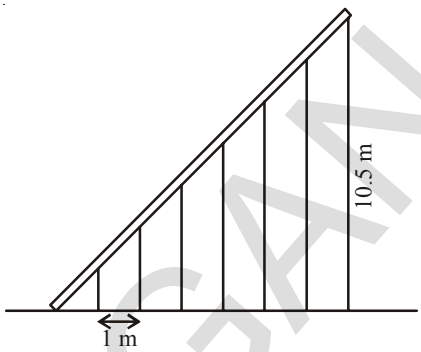
   (iii) प्रत्येकी 4 सें.मी. त्रिज्या असलेले दोन वर्तुळ एकरुप असतात.

   (iv) प्रत्येकी 4 से.मी. बाजु असलेले दोन समभुज त्रिकोन $\Delta\, ABC$ आणि $\Delta\, LHN$ एकरुप नाहीत.

   (v) बहुभुजीचे आरशातील प्रतिबिंब हे मुळ आकृतीला एकरुप असतात.
5. चौरसाकार बिंदु कागदावर एक बहुभुज काढा. विविध दिशेने एकरुप आकृत्या काढा. आणि त्यांचे प्रतिबिंब सुध्दा काढा.
6. आलेखाचा कागदाचा वापर करुन आयत काढा आणि सारख्या आकृतीची रचना करा. त्या दोन्हीच्या क्षेत्रफळाची मांती घेंऊन त्याच्या गुणोत्तराची तुलना संगत बाजुच्या गुणोत्तराशी करा.

SCERT TELANGANA

7. तिरकस उतरत असलेल्या लोखंडीGudder चे वजन थांबविण्यसाठी आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे 7 खांबाचा वापर केला आहे. जर प्रत्येक दोन खांबातील अंतर एक मीटर आण शेवटच्या खांबाची उंची 10.5 मी.आहे. खांबांची उंची माहित करा.



8. तिन मिटर उंची असलेल्या उभ्या खांबा पासुन 5 मी दुर उभे आहे सुधाने इमारतीच्या मागच्या खांबाचे निरिक्षण केले असता इमारतीचा शेंडा शिखर आणि खांबाचे टोक एका रेषेमध्ये आहे. जर खांब आणि इमारतीमधील फरक 10 मीटर आहे. तर इमारतीच्या उंचीचा अंदाज लावा. [इथे सुधाची उंची सोडली आहे.]

9. कोणत्याही मापाचे चौकोन काढा मोजपट्टी घटक 3 चा विस्ताराची रचना करा. त्याच्या संगत बाजुची मोजनी करुन ते सारख्या आहेत की नाही पडताळ करा.

8.3 सममीती

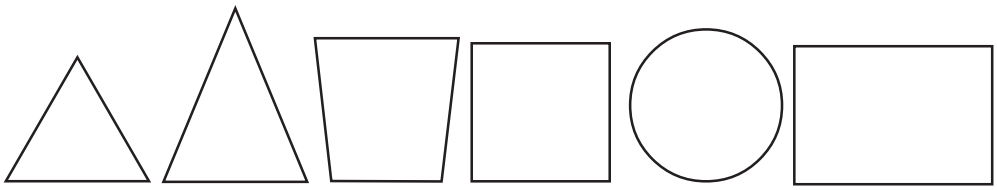
खालील चित्रांकडे बघा. त्यास आपण मधातुन अचुक घडी केली असता प्रत्येक चित्राचा एक भाग दुसऱ्या भागावर तंतोतंत जुळतो.

अशा चित्रांना आपण काय म्हणतो ? आकृतीतील रेषा ज्यापासुन आपण त्या आकृतीची घडी केली असता त्याचा अर्धा भाग दुसऱ्या अर्ध्या भागाशी तंतोतंत जुळतो. या रेषेला काय म्हणतात ? तुम्ही मागील वर्षाचे आकृत्या परत गोळा करा.

यास सममीती आकृत्या म्हणतात आणि जी रेषा त्यास दोन समान अचुक पणे विभागते याला सममीती रेषा म्हणतात.

हे करा

खालील आकृत्याच्या शक्य सममीती रेषा काढा.



SCERT TELANGANA

आपल्या सभोवती असलेल्या खालील सममीती डिझाईन चे निरिक्षण करा.

हे सर्व नकाशे वेगवेगळ्या सममीती रेषांच्या प्रकारापासुन उत्पन्न झाली आहे.

इथे कुत्र्यांचे चेहरा फोटोच्या तुकड्यावरुन पुर्णपणे सममीती आहे. तुम्ही मध्यभागी असलेली उभी रेषा पाहिली का ?

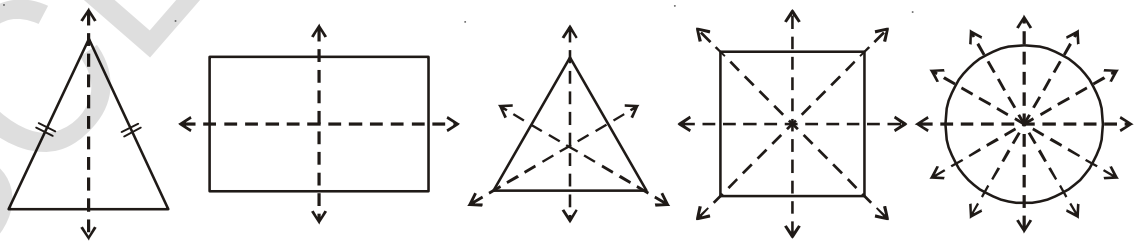
यालाच सममीती रेषा किंवा आरसारेषा म्हणतात.

या सममीतीला परावर्तन सममीती किंवा आरसा सममीती आपण म्हणतो.

उदाहरणातः टेकडीचे पाण्यात परावर्तन घेऊ ही सुध्दा परावर्तन सममीती आहे. आणि रेषा सममीती ही ती टेकडी आणि पाण्यातील प्रतिबिंब यास वेगळी करणारी आडवी रेषा आहे. ही पुर्ण पणे सममीती नसु शकते कारण पाण्याचा तळ भागाचा खालचा भाग अस्पष्ट आहे.

8.3.1 भ्रमणे सममीती

खालील सममीती रेषांचे निरिक्षण करा.



वेगवेगळ्या भुमीतील आकृत्यांना सममीती अंक्षांची संख्या वेगवेगळी असते. वरील दिलेली प्रत्येक आकृती वेटोळे फिरवा.

SCERT TELANGANA

त्यांच्या केंद्रावरुन एक पुर्ण वेटोळी फेरी पुर्ण केल्यानंतर किती वेळा तिच्या मुळ रुपात येथे माहित करा.

उदाहरणात आयताला दोन रेषा किंवा सममीती अक्ष असतात. जेव्हा केंद्रापासुन त्यास आपण वेटोळी फिरविले असता त्याचे रुप मुळ रुपासारखे दोनदा दिसते. या संख्येला भ्रमनाचा क्रम म्हणतात.

तुमची माहिती खालील तक्त्यात लिहा.

समव्दिभुज त्रिकोन	सममीतीच्या अक्षांची संख्या	मुळ रुपांत दिसलेली संख्या	भ्रमणाचा क्रम
समव्दिभुज त्रिकोन	.....	.....	.....
आयत	2	2	2
समभुज त्रिकोन	.....	.....	.....
चौरस	.....	.....	.....
वर्तुळ	.....	.....	.....

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. भुमीतीय आकृत्यांचा भ्रमनाचा क्रम आणि सममीत अक्षांची संख्या यामध्ये काय संबंध आहे.?
2. नियमीत बहुभुजीला किती सममीती अक्ष असतात ? नियमीत बहुभुजीच्या एकुण बाजु आणि भ्रमणाचा क्रम यामध्ये काही संबंध आहे का ?

8.3.2 बिंदु सममीती

बाजुच्या आकृतीचे निरिक्षण करा यामध्ये सममीती रेषा आहे का ? यामध्ये सममीती रेषा राहत नाही परंतु दुसऱ्या प्रकारची सममीती असते. या आकृतीला तुम्ही वरच्या बाजुने किंवा खालच्या बाजुने पाहिले असता ती सारखी दिसते.म्हणजे कोणत्याही दोन विरुध्द दिशेत पाहिले असता. सारखीच दिसते यालाच बिंदु सममीती म्हणतात.तुम्ही आकृतीकडे पाहिले असता तुम्हास दिसुन येते की, त्याच्या प्रत्येक भागास एक सारख्या बिंदु आहे. तुम्ही त्याच्या मधोमध एक रेषा काढली तर ती आकृती ला दोन्ही बाजुला समान अंतरावर कापते. अजुन काही केंद्रावरुन रेषा काढुन पडताळा करुन पहा.

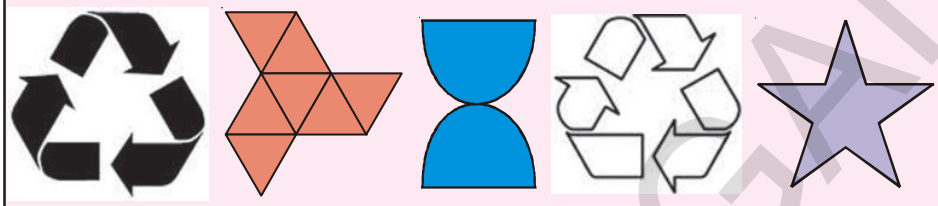
आता या आकृतीला बिंदु सममीती आहे. आपण इंग्रजी अक्षाराचे निरिक्षण करुन त्यास बिंदु सममीती सुध्दा आहे. हे निरिक्षणास येते.

X H I S N Z

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करा.

1. खालील पैकी कोणत्या आकृत्यास बिंदु सममीती आहे ओळखा

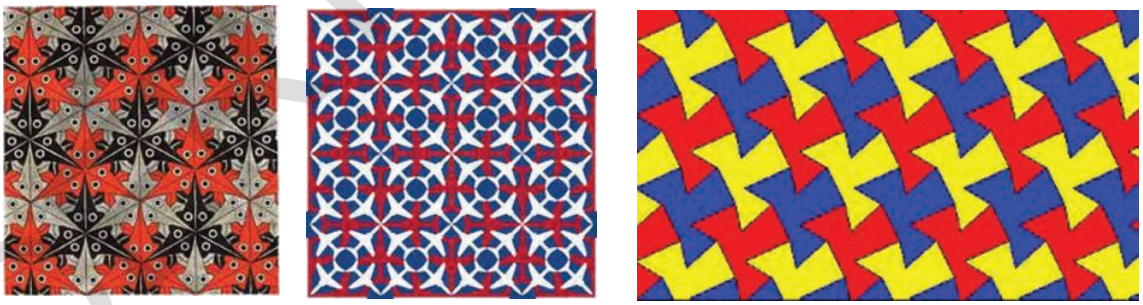


2. वरील कोणत्या आकृत्यामध्ये सममीती आहेत ?
3. तुम्ही रेषा सममीती आणि बिंदु सममीती मधील असलेल्या संबंधाला काय म्हणु शकता.?

8.3.3 सममीतीचे उपयोजन

- जास्त वस्तुमध्यें आपण कमीत कमी कोणत्या सममीतीचाएक प्रकारे वापरतो.
- जास्तीत जास्त उपकराणानी उत्पत्ती केलेले उत्पाद सममीती आहेत हे उत्पादन वाढवते.

या नमुन्याचे निरिक्षण करा



या तुम्हाला कुठे आढळतात ? या आकृत्या आपणास फरशीच्या नकाशात विणलेल्या कापडाच्या रंगीत चित्रात इत्यादीत आढळतात हे नमुने कसे तयार होतात.?

हे नमुने एकरुप आकृत्या किंवा आरशाचे प्रतिबिंब सर्व दिशेने आजुबाजुला क्षेत्रफळात पसरुन एकमेकावर न येता किंवा सांध ने ठेवता मांडणी केल्यास तयार होतात त्यालाच टेस्सीलेशन म्हणतात.

ही आकृतीची सुंदरता वाढवतात. ती संपुर्ण सममीती आहे का ?

मुलभुत आकृत्या ज्याचा वापर टेस्सीलेशन तयार करण्याठी होतो ती सममीती आहे का ?

SCERT TELANGANA

तुम्हास दिसुन येते की, फक्त काही नमुने पुर्णपणे सममीती आहे आकृती (b) आणि इतरांमध्ये कोणताही सममीती पुर्ण नाही आकृती (a)मुलभुत आकृती ठराविक आकृती सममीती आहेत.

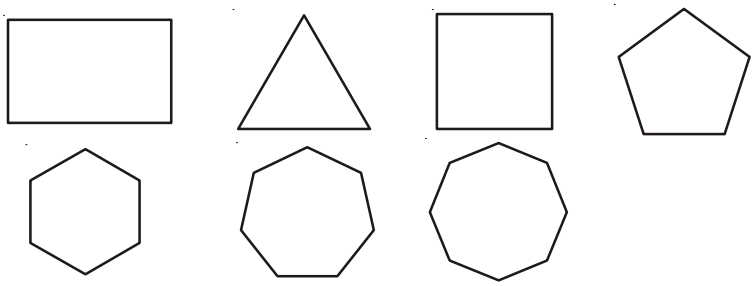
खालील टेस्सीलेशन चे पुन्हा निरिक्षण करा.

या टेस्सीलेशन मध्ये वापरलेले मुलभुत रुप कोणते ते आहेत ?

तुमच्या लक्षात येते की, टेस्सीलेशन काढण्यासाठी अर्धा आयत, अर्धाचौरस, चौरस आणि समभुज त्रिकाणे, अर्ध समभुज त्रिकोण या मुलभुत आकाराचा वापर होते. बहुतेक टेस्सीलेशन या आकारा वरुनच काढतात

अभ्यास - 8.2

1. मोठे असलेल्या इंग्रजी मुळाक्षरांना कापुन तुमच्या वहित चिकटवा. प्रत्येक अक्षरासाठी शक्य असल्यास सममीती रेषा काढा.
   (i) किती अक्षरांना रेषीय सममीती नसते ?
   (ii) किती अक्षरांना एक रेषा सममीती असते ?
   (iii) किती अक्षरांना व्दिरेषा सममीती असते ?
   (iv) किती अक्षरांना दोन पेक्षा जास्त रेषा सममीती असते ?
   (v) किती ना भ्रमन सममीती असते ?
   (vi) त्यापैकी कितीला बिंदु सममीती असते ?
2. खालील आकृत्यासाठी रेषा सममीती काढा. त्यापैकी कितींना बिंदु सममीती आहे. ओळखा त्या रेषा सममीती आणि बिंदु सममीती मध्ये काही तात्पर्य आहे का ?



SCERT TELANGANA

3. कमीत कमी एक रेषा सममीती असलेल्या त्याच्या पृष्ठासोबत काही नैसर्गिक वस्तुंची नांवे लिहा.

4. तीन टेक्सलेशन काढा आणि तुमच्या टेस्सलेशन वर वापरलेल्या मुलभुत आकाराची नावे द्या.

आपण काय चर्चा केली.

- आकार हे एकरुप असते जेव्हा त्यांचे रुप आणि आकार सारखा असतो.
- आकार हे एकरुप असते जेव्हा ते एकाच रुपात असुन वगेवेगळया आकारात असतात.
- तीन टेस्सालेशन काढा आणि तुमच्या टेस्सलेशन वर वापरलेल्या मुलभुत रुपाची नावे द्या.
- जेव्हा आपण एक रुपास/सारख्या रुपास/ झटका देऊन उघडतो, घसरवतो वळवितो तेव्हा त्याचे सारखेपण सारखेच राहातो.
- आकृतीला सममीती असते किंवा नसते
- आकृतीला एक पेक्षा जास्त सममीती असते.
- सममीती तिन प्रकारचे आहेत. रेषा सममीती, भ्रमण सममीती आणि बिंदु सममीती
- भ्रमण सममीती मध्ये आकृती केंद्रभोवती अशा प्रकारे फिरते की, ती मुळ आकृतीसारखी दोन तीनदा दिसते.सारख्या दिसणाऱ्या एकुण वेळेला क्रम म्हणतात.
- प्रतलास साध न देता किंवा एकमेंकावर न येता भरण्यासाठी वारंवारता येणाऱ्या आकृतीने बनविलेल्या नमुन्याला टेस्सलेशन म्हणतात.
- सारख्या आकृतींना वाढवल्यास किंवा कमी केल्यास या पध्दतीला विस्तार असे म्हणतात.

भ्रमण करणारा भहुभुजी

n बाजु असलेल्या क्रम बहुभुजीला काढण्यासाठी खालील पध्दतीचा उपयोग होतो.

पुर्ण भ्रमण करुन पुर्व स्थीतीत आणुन आवडत्या आकृत्या काढु शकतो. भ्रमणाचा कोन माहित करण्यासाठी 3600 ला आकृती वारंवार येणाऱ्या संख्येने भागल्यास माहित होते. खालील आकृतीत वारंवार येणारी संख्या 8 आहे..

जर चौरस घेतला असता. त्याचा एक शिरोबिंदु फिरवुन आणि त्याचा कर्ण आणि मध्य बिंदु फिरविल्यास कोणती आकृती तयार होत.

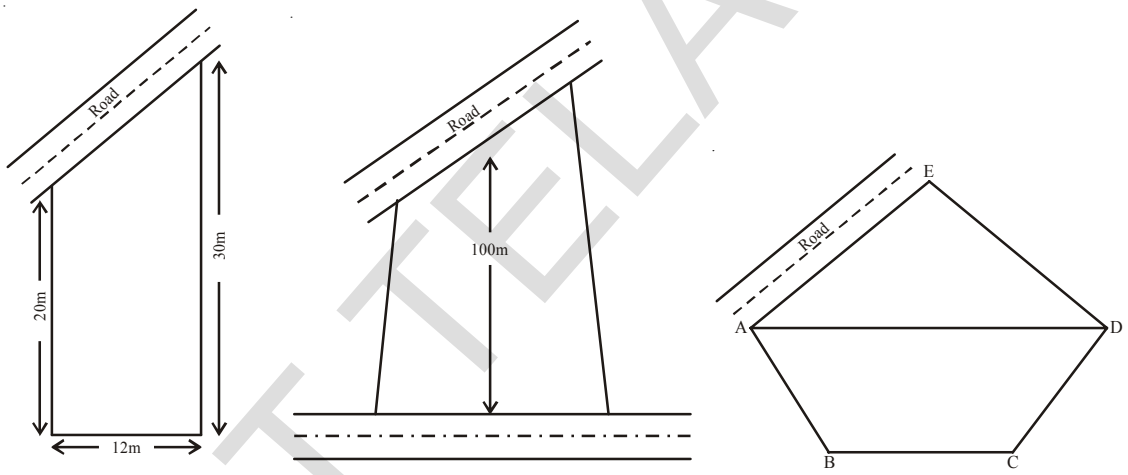
SCERT TELANGANA

धडा 9

प्रतलिय आकृत्यांचे क्षेत्रफळ

9.0 प्रस्तावना

देवर्शला स्वत:चे घर बांधण्यासाठी प्लॉट विकत घ्यायचे होते.त्यांनी पाहिलेल्या काही आकाराचे प्लॉट खाली दिलेले आहे



(a) (b) (c)

आकृती. 9.1

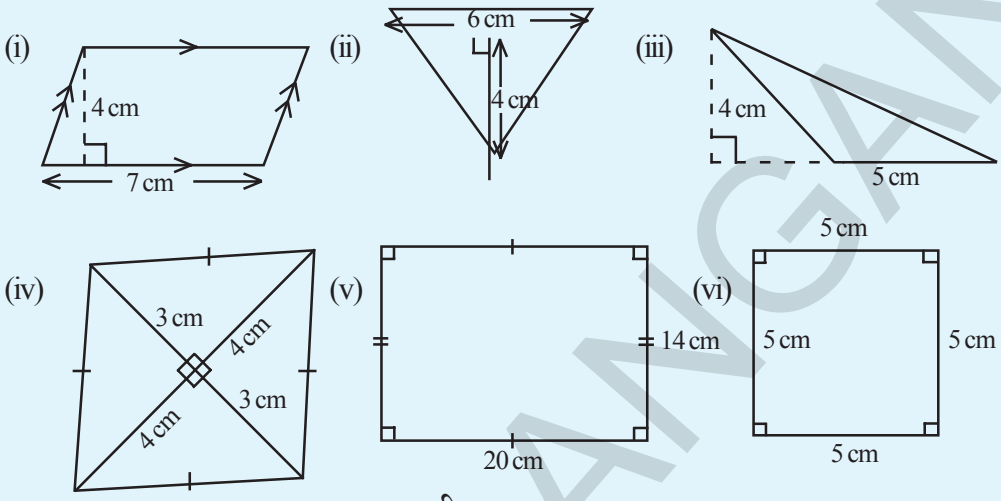
प्लॅट (a) हे समलंब चौकोनाच्या आकाराचे आहे.प्लॉट (b) हे चौकोनाच्या आकाराचे आहे. (c) हे पंचभुज आकाराचे आहे. जागेवर त्यांचे घर बांधायचे होते म्हणुन अशा आकृत्याचे क्षेत्रफळ त्याला माहित करायचे आहे.

आयत, चौरस, समांतरभुज चौकोन, त्रिकोण आणि समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ कसे माहित करावे हे आपण शिकलेले आहोत. तर आपण या पाठात समलंब चौकोन, चौकोन, वुर्तळ आणि व्दैत्रिज्या वुर्तळखंडखख चे क्षेत्रफळ कसे माहित करावे हे शिकणार आहोत.तर आपण सुरुरवातीला आयत, चौरस, समांतर भुज चौकोन आणि समभुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळाची उजळणी करु या.

SCERT TELANGANA

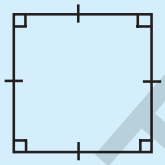
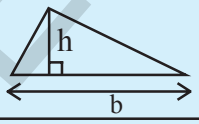
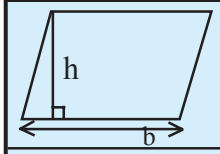
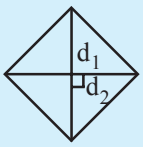
हे करा

1. खालील आकृत्यांचे क्षेत्रफळ माहित करा.



आकृती. 9.2

2. खाली तक्त्यात काही प्रतलिय आकृत्यांचे माप दिलेली आहेत. ते पुर्ण नाही आहे तर सुटलेली माहिती लिहा.

आकृती		माप	क्षेत्रफळाचे सुत्र	दिलेली आकृतीचे क्षेत्रफळ
	चौरस	चौरसाची बाजु 15 सें.मी.	A = बाजु×बाजु	.....
	आयत	लांबी = 20 सें.मी. रुंदी = ...	A = $l \times b$	280सें.मी.^{2}
	त्रिकोण	पाया = 5 सें.मी. उंची = ...	A = ...	60सें.मी.^{2}
	समांतरभुज चौकोन	उंची = 7.6सें.मी. पाया = ...	A = b × h	38सें.मी.^{2}
	समभुज चौकोन	d_1 = 4 सें.मी. d_2 = 3 सें.मी.	.....	.....

SCERT TELANGANA

9.1 समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ

मेन रोड च्या जवळ कुमार चा प्लॉट आहे. (आकृती 9.3)त्याच्या प्लॉट च्या बाजुला वेगळे आयताकार प्लॉट आहेत. त्याच्या प्लॉट ला फक्त एक समांतर बाजुची जोडी आहे. म्हणजेच समलंब चौकोनाच्या आकाराचे आहे. याचे क्षेत्रफळ तुम्ही माहित करु शकता का ?

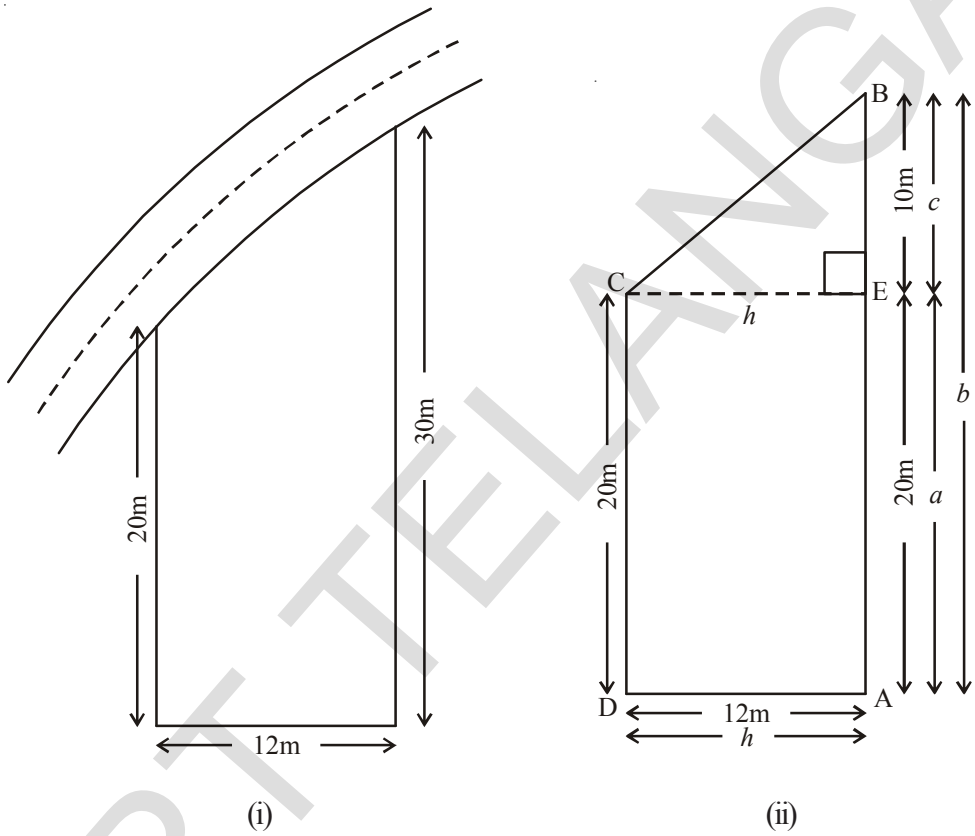


Fig. 9.3

आकृती 9.3 (i)मधील प्लॉट च्या शिरोबिदुला नांवे देऊ CE ⊥ ABकाढल्याने त्या प्लॉट चे दोन भाग होतात एक आयताकार आणि दुसरा त्रिकोणीय आकाराचे (जे की काटकोन त्रिकोण आहे.)हे आकृती 9.3 (ii) मध्ये दाखविल्या प्रमाणे

Δ ECBचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}h \times c = \frac{1}{2}\ 12 \times 10 = 60$ मी^{2}

ADCE आयताचे क्षेत्रफळ = AE × AD = 20 × 12 = 240 मी^{2}

ABCD समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = Δ ECBचे क्षेत्रफळ + ADCE आयताचे क्षेत्रफळ

= 60 + 240 = 300 मी^{2}

SCERT TELANGANA

दोन्ही क्षेत्रफळ मिळवुन आपण क्षेत्रफळ माहित करु शकतो.

$\therefore$ ABCD चे क्षेत्रफळ = ADCEक्षेत्रफळ + ECB चे क्षेत्रफळ

$\overline{AD} = \overline{EC} = h$
$\overline{AE} = a, \overline{AB} = b$

$$= (h \times a) + \frac{1}{2}(h \times c)$$

$$= h(a + \frac{1}{2}c)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right) = \frac{h}{2}(a+a+c)$$

$$= \frac{1}{2}h(a+b) \; (\because c + a = b)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ उंची (समांतर बांजुची बेरीज)}$$

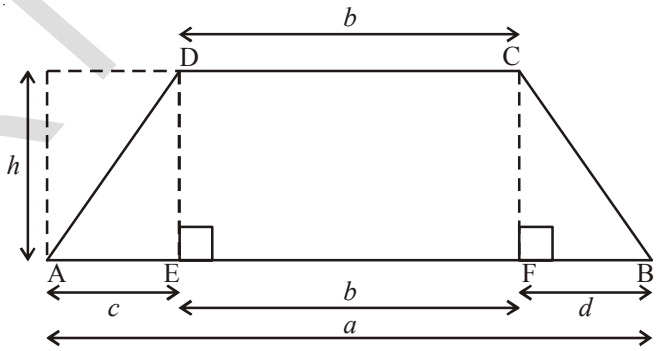
वरील समीकरणात h, bआणि a ची किंमत ठेऊन

ABDE चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}h(a+b)$

जेथे $h = 12$, $a = 20$, $b = 30$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times (30 + 20) = 300 \text{ मी}^2$$

उदाहरण1: येथे खेळायच्या मैदानाची आकृती आहे. या खेळायच्या मैदानाचे क्षेत्रफळ माहित करा.



आकृती. 9.4

सोडवणुक: येथे आपण आकृतीला एक आयत आणि एक त्रिकोणामध्ये विभागु शकत नाही. त्या ऐवजी आपण येथे एक आयत आणि दोन त्रिकोण विभागु शकतो. $DE \perp AB$ आणि $CF \perp AB$. आता समलंब चौकोन ABCD तीन भागामध्ये विभागल्या गेला आहे. एक आयत DEFC आणि दुसरे दोन त्रिकोण ΔADE आणि ΔCFB.

SCERT TELANGANA

समलंब चौकोनABCD चेक्षेत्रफळ=ADEचे क्षेत्रफळ + DEFC आयताचे क्षेत्रफळ + CFB चे क्षेत्रफळ

$$= \left(\frac{1}{2} \times h \times c\right) + (b \times h) + \left(\frac{1}{2} \times h \times d\right)$$

$$= h\left[\frac{1}{2}c + b + \frac{1}{2}d\right]$$

$$= h\left[\frac{c + 2b + d}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{c + b + d + b}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{a + b}{2}\right] \quad (\because c + b + d = a)$$

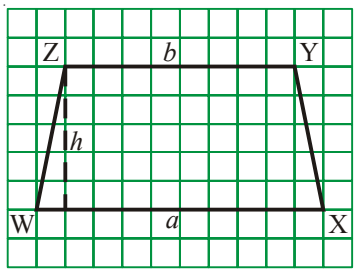
म्हणुन आपण समलंब चौकोनाच्या क्षेत्रफळाचे सुत्र खालील प्रमाणे लिहु शकतो.

$$= \text{उंची} \left[\frac{\text{समांतर बाजुची बेरीज}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{दोन समांतर बाजुमधील अंतर} \times (\text{समांतर बाजुंची बेरीज})$$

कृती

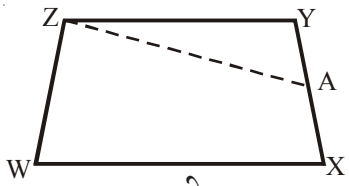
1. 9.5 (i) मध्ये दाखविलेल्या प्रमाणे आलेख कागदावर WXYZ समलंब चौकोन काढा. आणि त्याला कापा.



आकृती. 9.5
(i)

2. आकृती 9.5 (ii) प्रमाणे बाजु XY ला घडी करुन त्याचा मध्यबिंदु माहित करा व त्याला A नाव द्या.

3. त्यावर AZ रेषा काढा.



आकृती. 9.5
(ii)

SCERT TELANGANA

4. ZAवरुन WXAZ समलंब चौकोनाला दोन भागात कापा. आकृती 9.5 (iii) प्रमाणे ΔZYA ला ठेवा, जेथे AY ला AX वर अशा रितीने ठेवा की 'Y' हा 'X'शी तंतोतंत जुळायला पाहिजे. आपल्याला ΔWZB मिळते.

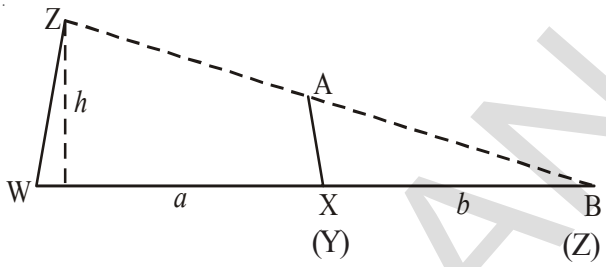


Fig. 9.5 (iii)

मोठ्या त्रिकोणाच्या पायाची लांबी किती आहे.? आकृती 9.5 (iii) मधील त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळासाठी समीकरण लिहा.

5. त्रिकोण WZB चे क्षेत्रफळ आणि समलंब चौकोन WXAZ चे क्षेत्रफळ समान आहे. ते कसे?

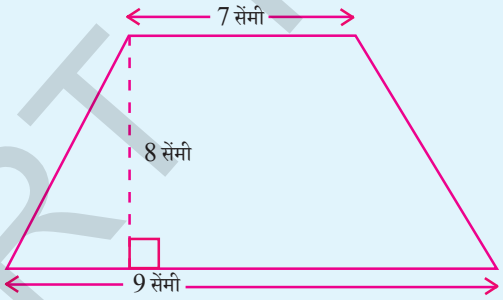
समलंब चौकोन WXAZ चे क्षेत्रफळ = त्रिकोण WZB चे क्षेत्रफळ

$= \frac{1}{2}$ उंची × पाया $= \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$

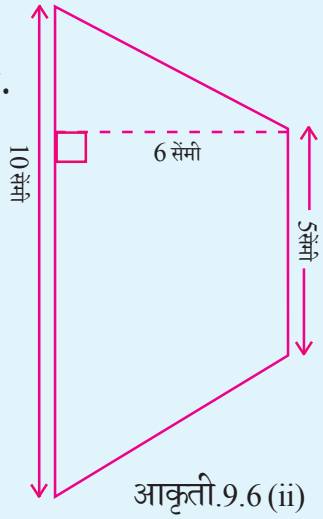
सुचना : आलेख कागदावर एकक चौरसांची मोजणी करुन क्षेत्रफळाची तपासणी करा.

हे करा

1. खालील समलंब चौकानाचे क्षेत्रफळ माहित करा.



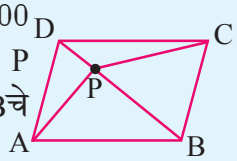
आकृती.9.6 (i)



आकृती.9.6 (ii)

2. समलंब चौकानाचे क्षेत्रफळ16सें.मी.^{2}आहे. एका समांतर बाजुची लांबी 5 सें.मी. आहे. आणि त्या दोन समांतर बाजु मधील अंतर 4 सें.मी. आहे. तर दुसऱ्या समांतर बाजुची लांबी माहित करा ? या समलंब चौकोनाला आलेख कागदावर काढण्याचा प्रयत्न करा आणि क्षेत्रफळाची तापसणी करा.

3. ABCD हे समांतर भुज चौकोन आहे. त्याचा क्षेत्रफळ 100 चौरस सें.मी. आहे. समांतर भुज चौकोनाच्या आत मध्ये P हा एक बिंद आहे(आकृती पहा) तर माहती करा ΔAPBचे क्षेत्रफळ + ΔCPD चे क्षेत्रफळ



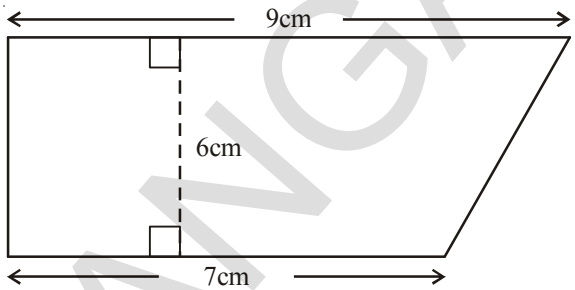
SCERT TELANGANA

सोडविलेली उदाहरणे

उदाहरण 2: एका समलंब चौकानाची समांतर बाजुची लांबी 9 सें.मी. आणि 7 सें.मी. आहे. त्याच्या मधील अंतर 6 सें.मी. आहे. समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

सोडवणुक: समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजुंची लांबी 9 सें.मी. अणि 7 सें.मी. आहे. तर त्या समांतर बाजुची लांबीची बेरीज (9 + 7) सें.मी. = 16सें.मी.

त्यामधील अंतर = 6सें.मी.



समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (समांतर बाजुची लांबीची बेरीज) × (त्या मधील अंतर)

$= (\frac{1}{2} \times 16 \times 6)$ सें.मी.^{2}

= 48सें.मी.^{2}

उदाहरण 3: समलंब चौकानाचे क्षेत्रफळ 480सें.मी.^{2}आहे. एक समांतर बाजुची लांबी 24सें.मी. आहे. आणि समांतर बाजु मधील अंतर 8सें.मी. आहे . तर दुसऱ्या समांतर बाजुची लांबी माहित करा.

सोडवणुक : समांतर बाजु मधील एक बाजु = 24सें.मी.

दुसऱ्या समांतर बाजुची लांबी 'x' सें.मी. समजु

तसेच समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = 480 सें.मी.^{2}

समांतर बाजु मधील अंतर = 8 सें.मी.

∴ समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ

$= \frac{1}{2} \times$ (समांतर बाजुच्या लांबीचे बेरीज) × (त्यामधील अंतर)

$\therefore \quad 480 = \frac{1}{2} \times (24 + x) \times 8$

$\Rightarrow \quad 480 = 96 + 4x$

$\Rightarrow \quad 480 - 96 = 4x$

$\Rightarrow \quad 4x = 384$

$\Rightarrow \quad x = \frac{384}{4} = 96$ सें.मी.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 4: समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजुच्या लांबीचे गुणोत्तर 4:1आहे. त्या मधील अंतर 10 सें.मी. आहे. जर समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ 500 सें.मी.^{2}.तर समांतर बाजुंची लांबी माहित करा.

सोडवणुक: समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = 500सें.मी.^{2}

समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजु मधील अंतर =10 cm

समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजुची लांबीचे गुणोत्तर = 4 : 1

समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजुंची लांबी $4x$ से.मी आणि x सें.मी. समजु

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$(समांतर बाजुंची बेरीज) (त्यामधील अंतर)

$$\Rightarrow \quad 500 = \frac{1}{2}(x + 4x) \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 500 = (x + 4x)\ 5$$

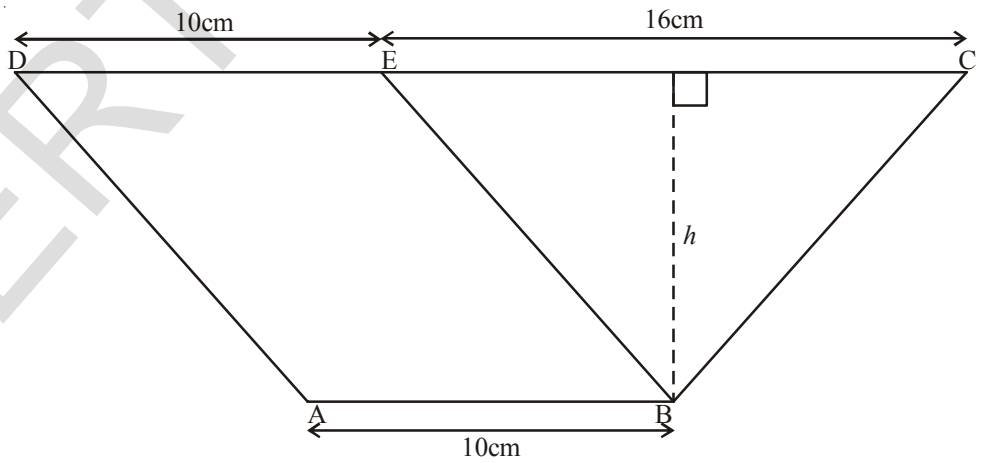
$$\Rightarrow \quad 500 = 25x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{500}{25} = 20\text{सें.मी.}$$

$\therefore$ एक समांतर बाजु = 20सें.मी.

$\therefore$ दुसरी समांतर बाजु = $4x = 4 \times 20 = 80$सें.मी. ($\because$ समांतर बाजु 4:1 मध्ये आहेत)

उदाहरण 5: दिलेल्या आकृतीत ABED हे समांतरभुज चौकोन आहे.जेथे AB = DE = 10 सें.मी. आहे. आणि Δ BEC क्षेत्रफळ 72सें.मी.^{2}आहे. जर CE = 16सें.मी. आहे तर ABCD समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ माहित करा.



आ..9.7

सोडवणुक: Δ BEC चे क्षेत्रफळ = × पाया × उंची

SCERT TELANGANA

$$72 = \frac{1}{2} \times 16 \times h$$

$$h = \frac{72 \times 2}{16} = 9 \text{ सें.मी.}$$

ABCD समलंब चौकोन मध्ये

AB = 10 सें.मी.

DC = DE + EC ($\because$ DE = AB)

= 10 सें.मी. + 16 सें.मी. = 26 सें.मी.

$\therefore$ ABCD समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ

$= \frac{1}{2} \times$ (समांतर बाजुंची बेरीज) $\times$ (त्यामधील अंतर)

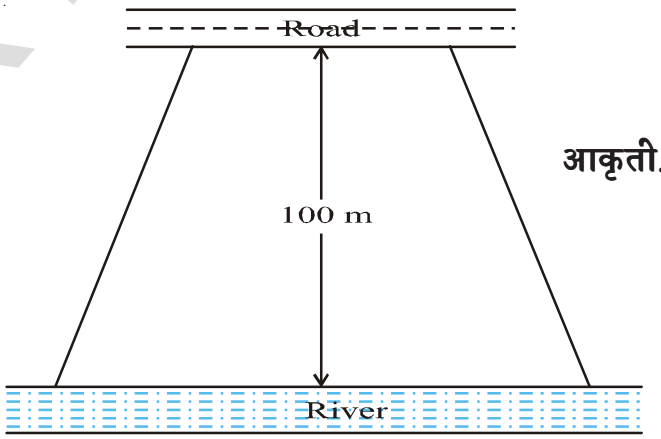
$= \frac{1}{2}$ (AB+DC) h

$= \frac{1}{2}(10 + 26) \times 9$ सें.मी.^{2}

$= 18 \times 9$ सें.मी.^{2}

$= 162$ सें.मी.^{2}

उदाहरण 6: मोहन ने नदीच्या बाजुला असलेले शेत विकत घ्यायचे ठरविले. बाजुच्या आकृतीत दाखविलेले शेत विकायचे आहे. नदीकडील बाजुचे लांबी ही रस्त्याकडील बाजुच्या लांबीपेक्षा दुप्पट आहे आणि ते दोन्ही समांतर आहेत.



आकृती.9.8

या शेताचे क्षेत्रफळ 10,500मी^{2} आहे. रस्ता आणि नदी मधील अंतर 100 मी. आहे. तर नदी कडील बाजुची लांबी माहित करा.

SCERT TELANGANA

सोडवणुक: रस्त्याच्या कडेला असलेल्या शेताच्या बाजुची लांबी x समजु

तर, नदीच्या बाजुला असलेल्या बाजुची लांबी $= 2x$ मी.

त्या मधील अतंर = 100 मी.

शेतीचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (समांतर बाजुची बेरीज) × (त्यामधील अंतर)

$$10{,}500 = \frac{1}{2}(x + 2x) \times 100$$

$$10{,}500 = 3x \times 50$$

$$x = \frac{10{,}500}{3 \times 50} = 70 \text{ मी.}$$

∴ नदी कडील बाजुची लांबी $= 2x = 2 \times 70$

$= 140$ मी.

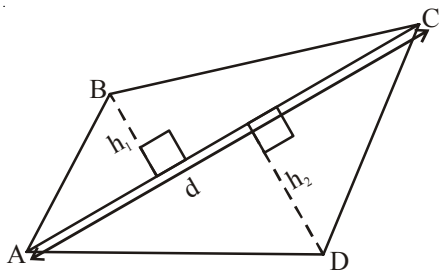
9.2 चौकानाचे क्षेत्रफळ

चौकानाचा एक कर्ण काढुन त्याला दोन त्रिकोणामध्ये विभागु शकतो. चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी आपल्याला हे मदत होते

चौकोन ABCD ला महेश ने कर्ण AC काढुन दोन त्रिकोणामध्ये विभागले.

त्रिकोणाचा पाया आणि त्याची उभी उंची या दोन मापाचा उपयोग करुन त्रिकोणाचा क्षेत्रफळ काढतो. हे आपल्याला माहित आहे. उभी उंची म्हणजे त्याच्या पायापासुन शिरोबिंदु पर्यंतचे अंतर जे त्याच्या पायावरील काटकोना पासुन मोजलेला असतात.

D आणि B बिंदु वरुन महेश ने AC वर दोन लंब रेषा काढल्या आणि अनुक्रमे त्याला h_1 आणि h_2 हे नाव दिले.



आकृती.9.9

ABCD चौकानाचे क्षेत्रफळ= (ABCचे क्षेत्रफळ) + (ADC चे क्षेत्रफळ)

$$= \frac{1}{2} \times AC \times h_1 + \frac{1}{2} AC \times h_2$$

$$= \frac{1}{2} AC[h_1 + h_2]$$

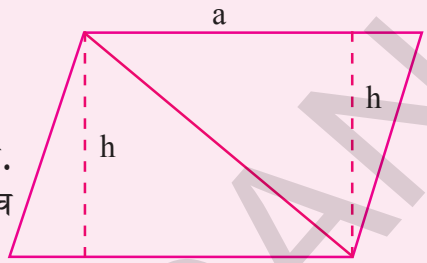
ABCD चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

येथे 'd' ही त्या कर्ण AC ची लांबी दर्शविते.

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करा

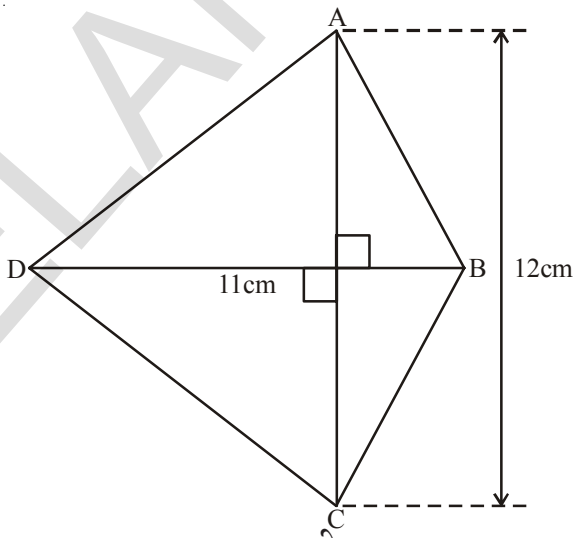
समांतर भुज चौकोन सुध्दा एक चौकोन आहे हे आपल्याला माहित आहे. अशा चौकोनाला दोन त्रिकोणामध्ये विभागु या. त्यांचे क्षेत्रफळ माहित करा. म्हणजेच तेच समांतरभुज चौकानाचे क्षेत्रफळ होय. तुम्हाला माहित असलेल्या सुत्राच्या प्रक्रियेला ही प्रक्रीया मिळती - जुळती आहे का



आ.9.10

चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णाची लांबी × उरलेल्या दोन शिरोबिंदतुन कर्णावर टाकलेल्या लंब रेषेच्या लांबीची बेरीज

उदाहरण 7: चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ माहित करा.

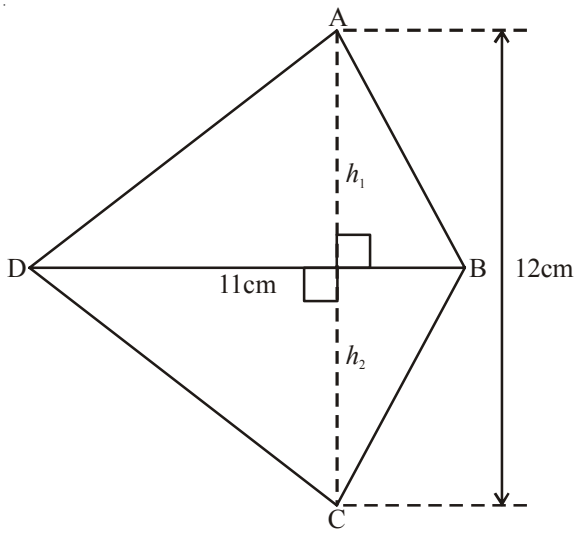


आकृती.9.11 (i)

सोडवणुक: चौकोनABCD चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}d(h_1+h_2)$

उरलेल्या दोन शिरोबिंदुतुन कर्णावर टाकलेल्या लंब रेषेच्या लांबीची बेरीज AC = $(h_1 + h_2)$

$h_1 + h_2 = 12$ सें.मी.



आकृती9.11 (ii)

SCERT TELANGANA

BD कर्णाची लांबी = 11 सें.मी.

$\therefore$ चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 6 \times 11 = 66$ सें.मी.^{2}.

9.3 समभुज चौकानाचे क्षेत्रफळ

समभुज चौकानाच्या क्षेत्रफळाचे सुत्र माहित करण्यासाठी आपण त्रिकोणाला विभागण्याची तीन सारखी पध्दत वापरु शकतो.

आकृतीत ABCD हा समभुज चौकोन आहे. समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकाचे लंभदुभाजक असतात. हे आपल्याला माहित आहे.

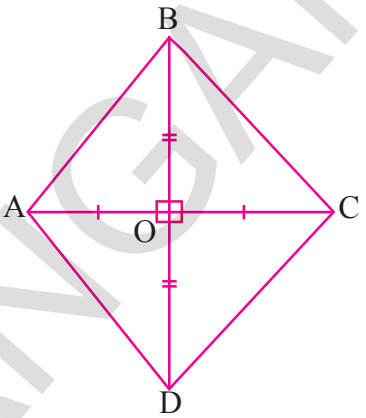


Fig.9.12

$\therefore$ OA = OC, OB = OD

आणि $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$

$= \angle AOD = 90^0$

ABCD समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = Δ ABC चे क्षेत्रफळ + क्षेत्रफळ Δ ADC

$= \quad \times AC \times OB + \frac{1}{2} \times AC \times OD$

$= \frac{1}{2} \times AC\,(OB+OD)$

$= \frac{1}{2} \times AC \times BD \qquad (\therefore OB + OD = BD)$

अशा प्रकारे समभुज चौकानाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$, जेथे d_1, d_2 हे त्याचे कर्ण आहेत.

दुसऱ्या शब्दात, समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या कर्णाच्या गुणाकाराच्या अर्धे असते.

उदाहरण 8: समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ माहित करा. जेथे कर्णाची लांबी 10 सें.मी. आणि 8.2 सें.मी. आहे.

सोडवणुक: समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ येथे d_1, d_2 कर्णाची लांबी आहेत.

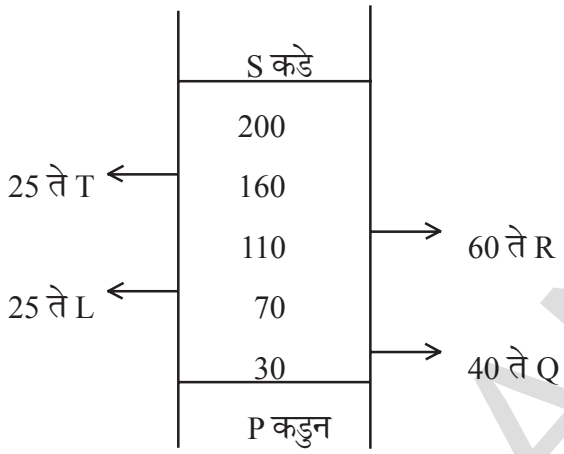
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2$ सें.मी.^{2}

$= 41$ सें.मी.^{2}

SCERT TELANGANA

9.4 शेतीची मोजणी

मोजणीदार एका शेतीची मोजणी करुन ती मापे त्याच्या शेत नोंदणी वहित खालील प्रमाणे नोंद केली. त्या शेती चे क्षेत्रफळ माहित करा.



खालील माहिती मिळते

1. हा शेत षटकोन आकाराचा आहे ज्याचे शिरोंबिंदु P, Q, R, S, T आणि L आहे.
2. PS हा कर्ण आहे
3. Q आणि R हे कर्णाच्या एका बाजुला आहे तर दुसऱ्या बाजुस T आणि L आहेत.
4. Q पासुन A 40 सें.मी. लंब टाकलेला आहे. अशा प्रकारे इतर लंब.
5. क्षेत्र नोंद वहित खालुन वरपर्यंत असलेले माप वास्तविक असले पाहिजे
6. 2 त्रिकोण आणि 2 समलंब चौकोन आणि या मध्ये शेतीची विभागणी झालेली आहे.

वरील आकृती वरुन खालील माप आपण माहित करु शकतो.

AC = PC – PA

= 110 – 30 = 80 मी.

CS = PS – PC

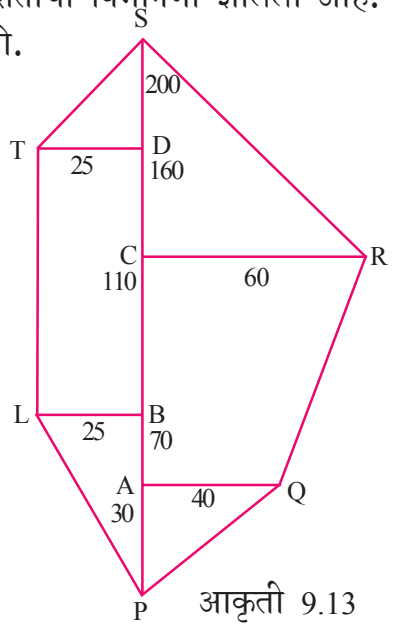
= 200 – 110 = 90 मी.

DS = PS – PD

= 200 – 160 = 40 मी.

BD = PD – PB

= 160 – 70 = 90 मी.



आकृती 9.13

SCERT TELANGANA

Δ APQ चे क्षेत्रफळ $= \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$ चौ.मी.

AQRC समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}(h(a+b)$

AQRC समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times AC\ (AQ + CR)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40 + 60)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times 100$

$= 4000$ चौ.मी.

Δ CRS चे क्षेत्रफळ $= \times CR \times CS = \frac{1}{2} \times 60 \times 90 = 2700$ चौ.मी.

PLTS समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times LB\ (TL + SP)$

$= \frac{1}{2} \times 25(90 + 200)$ $(\because TL = BD = 90)$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 290$

$= 3625$ चौ.मी.

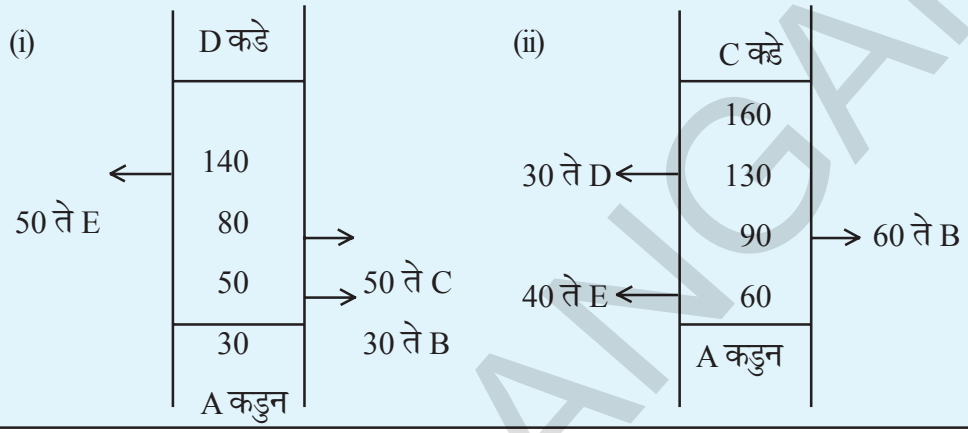
शेताचे क्षेत्रफळ $= 600 + 4000 + 2700 + 3625$

$= 10{,}925$ चौ.मी.

SCERT TELANGANA

हे करा

मोजणीदाराच्या क्षेत्र नोंद वहीत खालील महितीची नोंद मीटर मध्ये करुन आहे. तर त्या शेताची क्षेत्रफळ माहित करा.

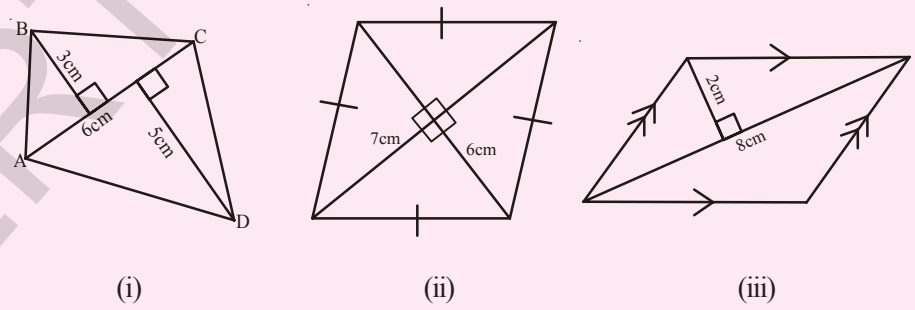


विचार करा आणि चर्चा करा:

समांतर भुज चौकोनामध्ये कर्ण काढली असता ते दोन एकरुप चौकोनात विभागल्या जाते.?

प्रयत्न करा

खालील चौकोनांचे क्षेत्रफळ माहित करा.



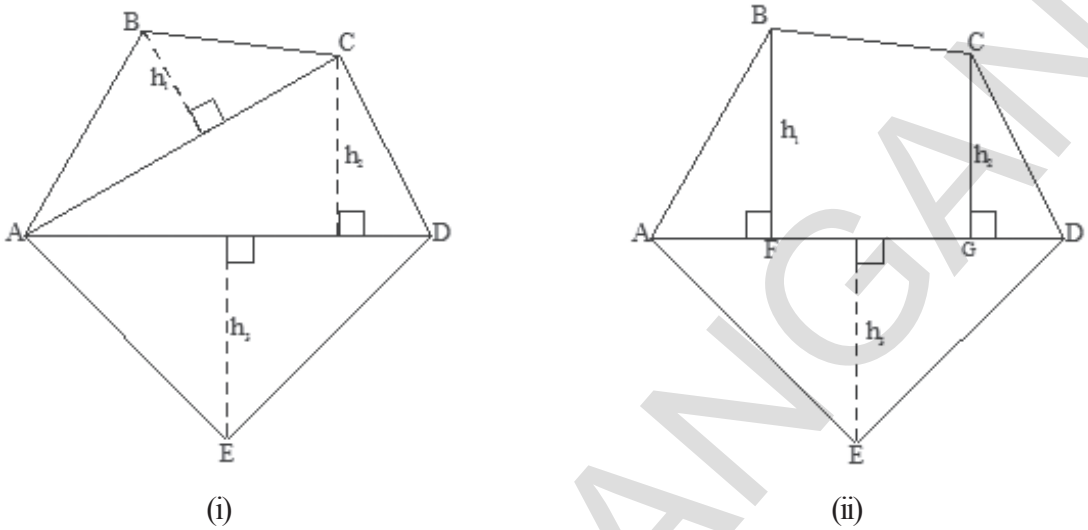
आकृती 9.13

9.5 बहुभुज चे क्षेत्रफळ

बहुभुज चे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी बहुभुज ला साध्या आकारात म्हणजेच त्रिकोण, आयत इत्यादी मध्ये विभागुन घ्यावा. आवश्यक असलेल्या क्षेत्रफळ मिळे पर्यंत विभागलेल्या साध्या आकारांचे क्षेत्रफळ काढुन त्यांची बेरीज करत जावावा.

SCERT TELANGANA

खालील पंचभुज चे निरिक्षण करा (आकृती 9.14)



(i) (ii)

आकृती.9.14

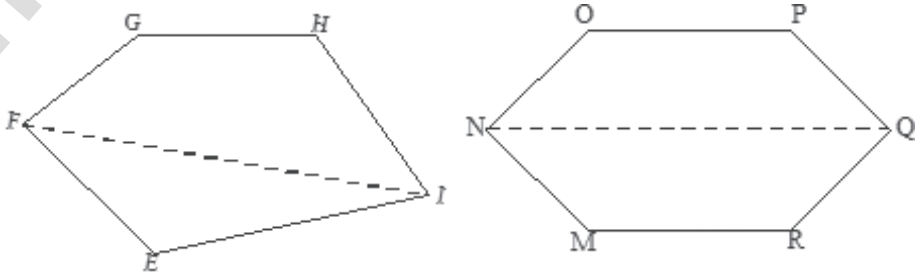
आकृती.(i) : AC आणि AD हे दोन कर्ण काढल्या नंतर ABCDE हा पंचभुज तीन भागा मध्ये विभागल्या जाते.

म्हणुन ABCDE चे क्षेत्रफळ = ΔABCचे क्षेत्रफळ + ΔACDचे क्षेत्रफळ + ΔAED चे क्षेत्रफळ

आकृती (ii) : AD कर्ण आणि BFआणि CG हे दोन लंब त्यावर काढले तर पंचभुज ABCDE हे चार भागामध्ये विभागल्या जाते. म्हणुन ABCDE चे क्षेत्रफळ = काटकोन त्रिकोन ΔAFB चे क्षेत्रफळ + BFGC समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ + कोटकोन त्रिकोण Δ CGD चे क्षेत्रफळ + Δ AEDचे क्षेत्रफळ.असे का? (BFGC समलंब चौकोनाचे समांतर बाजु ओळखा)

प्रयत्न करा

(i) खालील पंचभुज चे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी त्याला भागा (त्रिकोण आणि समलंब चौकोन) मध्ये विभागा

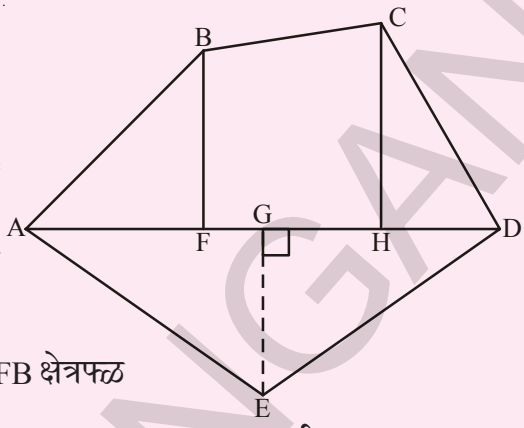


EFGHI पंचभुज चे FI कर्ण आहे MNOPQR हे NQ हे कर्ण आहे.

आकृती .9.15

SCERT TELANGANA

(ii) आकृती 9.14.मध्ये दाखविल्या प्रमाणे बहुभुज ABCDE ला विभागण्यात आलेले आहे. जर AD = 8सें.मी., AH =6 सें.मी., AF = 3सें.मी.आणि लंब रेषा BF = 2 सें.मी., CH = 3सें.मी.आणि EG = 2.5सें.मी.आहे तरे क्षेत्रफळ माहीत करा.



आकृती 9.16

ABCDE बहुभुज चे क्षेत्रफळ= AFB क्षेत्रफळ + ...

AFB चे क्षेत्रफळ = $\times$ AF $\times$ BF $= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$

FBCH समलंब चौकानाचे क्षेत्रफळ = FH $\times \frac{(BF + CH)}{2}$

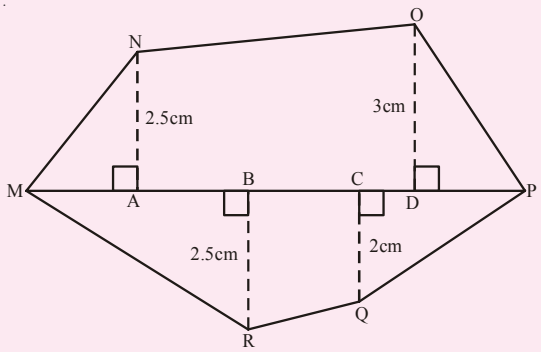
$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ [$\therefore$ FH = AH - AF]

Δ CHD चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ HD $\times$ CH = ...

Δ ADE चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ AD $\times$ GE = ...

म्हणुन ABCDE या बहुभुज चे क्षेत्रफळ = ...

(iii) जर MP = 9 सें.मी., MD = 7 सें.मी., MC = 6 सें.मी., MB = 4 सें.मी., MA = 2 सें.मी. तर MNOPQR बहुभुज (आकृती 9.17) चे क्षेत्रफळ माहित करा. NA, OC, QD आणि RB हे कर्ण MP वर लंब आहेत.

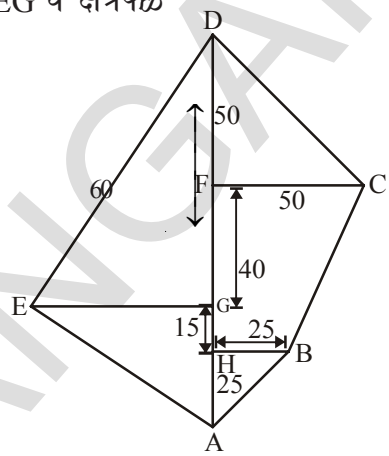


आकृती. 9.17

SCERT TELANGANA

उदाहरण 9: दाखविलेल्या बाजु वरुन शेतीचे क्षेत्रफळ माहीत करा. सर्व मापे मीटर मध्ये आहेत.

Solution: ABCDE चे क्षेत्रफळ = Δ ABH चे क्षेत्रफळ + BCFH समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ+ Δ CDF चे क्षेत्रफळ + Δ DEGचे क्षेत्रफळ + Δ AEG चे क्षेत्रफळ



आता ABH चे क्षेत्रफळ

$= \times AH \times HB$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 25$

$= \frac{625}{2}$ मी^{2} = 312.5 मी^{2}

BCFH समलंब चौ.क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times (HB + FC) \times HF$

$= \frac{1}{2}(25 + 50) \times 55$मी^{2}

$= \frac{75 \times 55}{2}$ मी^{2} = 2062.5 मी^{2}

Δ CDF क्षेत्रफळ $= \times FC \times DF$

$= \frac{1}{2} \times 50 \times 50$ मी^{2} = 1250 मी^{2}

Δ AED क्षेत्रफळ $= \times AD \times EG$

$= \frac{1}{2} \times 130 \times 60$

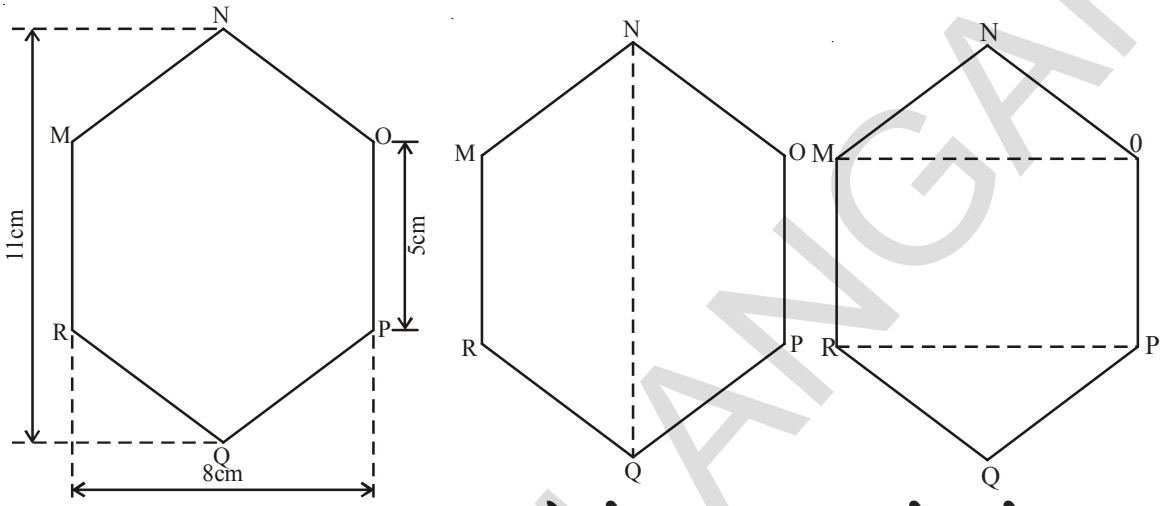
= 3900 मी^{2}

अशा प्रकारे ABCDE चे क्षेत्रफळ = 312.5 मी^{2} + 2062.5 मी^{2} + 1250 मी^{2} + 3900 मी^{2}

= 7525मी^{2}

SCERT TELANGANA

उदाहरण 10: प्रत्येक बाजु 5 सें.मी. असलेली MNOPQR हे षटकोन आहे आणि NQ च्या बाबतीत सम्मीत आहे. (आ.9.19)सुरेश आणि ऋषीका वेगवेगळ्या पध्दतीने विभागले.दोन्ही पध्दतीचा वापर करुन या षटकोनाचे क्षेत्रफळ माहित करा



सुरेशची पध्दत **ऋषीका ची पध्दत**

(i) (ii)

आकृती 9.19

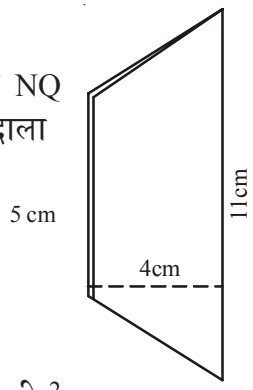
उदाहरण: सुरेश च्या पध्दती नुसार हे नियमीत षटकोन आहे. म्हणुन NQ हे षटकोनाला दोन एकरुप समलंबात विभागते. या कागदाला तुम्ही घडी करुन पडताळा करु शकता.

MNQR या समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ

$= 4 \times \frac{11+5}{2}$

$= 2 \times 16 = 32$ सें.मी.^{2}

म्हणुन MNOPQR या षटकोनाचे क्षेत्रफळ $= 2 \times 32 = 64$ सें.मी.^{2}



आ.9.20

ऋषीका ची पध्दती नुसार

3 सें.मी. उंची असलेले ΔMNO आणि ΔRPQ हे एकरुप त्रिकोण आहेत. या दोन त्रिकोणाला कापुन एकावर एक ठेऊन पडताळा करु शकता.

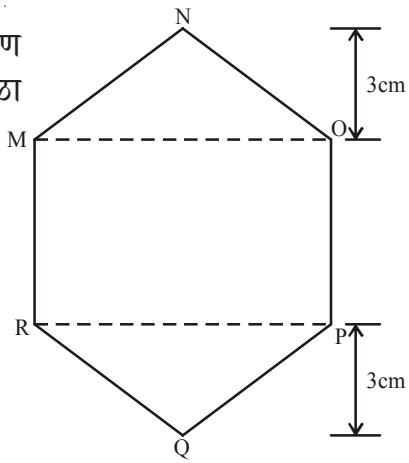
MNO चे क्षेत्रफळ = $\times 8 \times 3 = 12$ सें.मी.^{2}

= RPQ चे क्षेत्रफळ

MOPR आयता चे क्षेत्रफळ $= 8 \times 5 = 40$ सें.मी.^{2}

आता, MNOPQR या षटकोनाचे

क्षेत्रफळ $= 40+12+12 = 64$ सें.मी.^{2}

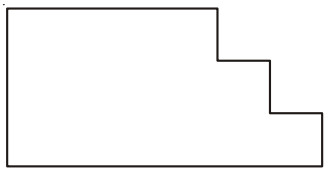


आकृती 9.21

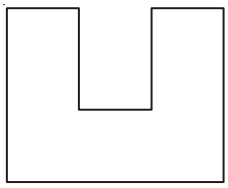
SCERT TELANGANA

अभ्यास - 9.1

1. दिलेले आकार सुचने प्रमाणे विभागा

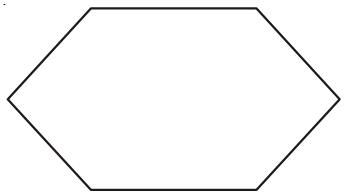


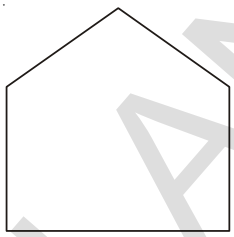
(i) 3 आयता मध्ये



(ii) 3 आयता मध्यें

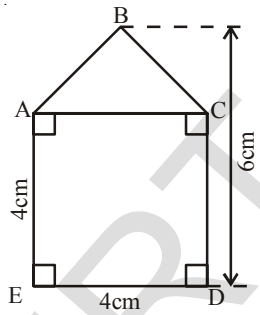
(iii) 2 समलंब चौकोनामध्ये



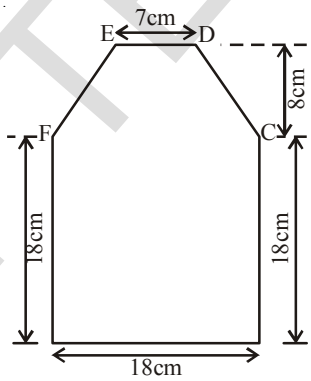


(iv) 2 त्रिकोण आणि एक आयतामध्ये (v) 3 त्रिकोणामध्ये

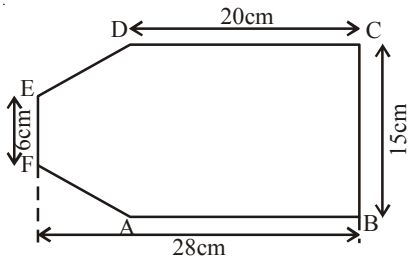
2. खालील प्रत्येक आकृतीचे क्षेत्रफळ माहित करा



(i)



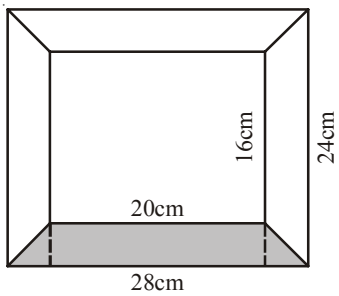
(ii)



(iii)

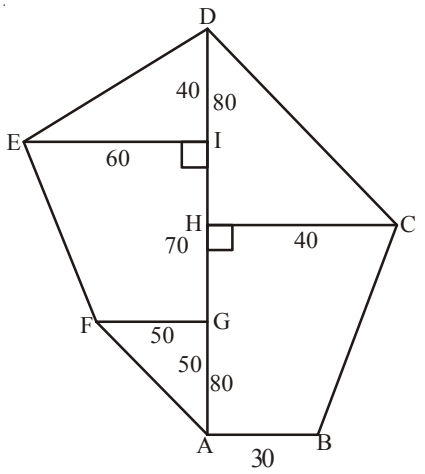
3. जेव्हा कर्ण AC = 10 सें.मी. आणिB आणि D वरुन AC वर काढलेल्या लंब रेषेची लांबी अनुक्रमे 5 सें.मी.आणि 6 सें.मी.आहे. तर त्या चौकान ABCD चे क्षेत्रफळ माहित करा.

4. बाजुच्या फ्रेम चित्रात बाहेरील माप28 सें.मी. × 24 सें.मी.आणि आतील माप 20 सें.मी. × 16 सें.मी.आहे. फ्रेम च्या रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा. जेव्हा प्रत्येक भागाची रुंदी सारखी असेल.

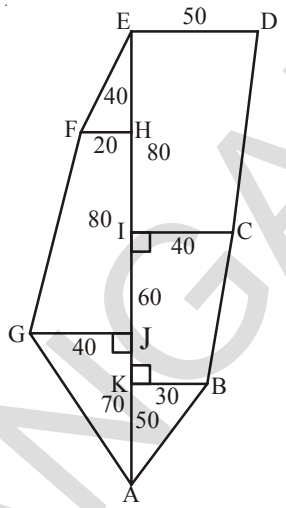


SCERT TELANGANA

5. खालील प्रत्येक शेतीचे क्षेत्रफळ माहित करा. सर्व मापे मीटर मध्ये आहेत.



(i)

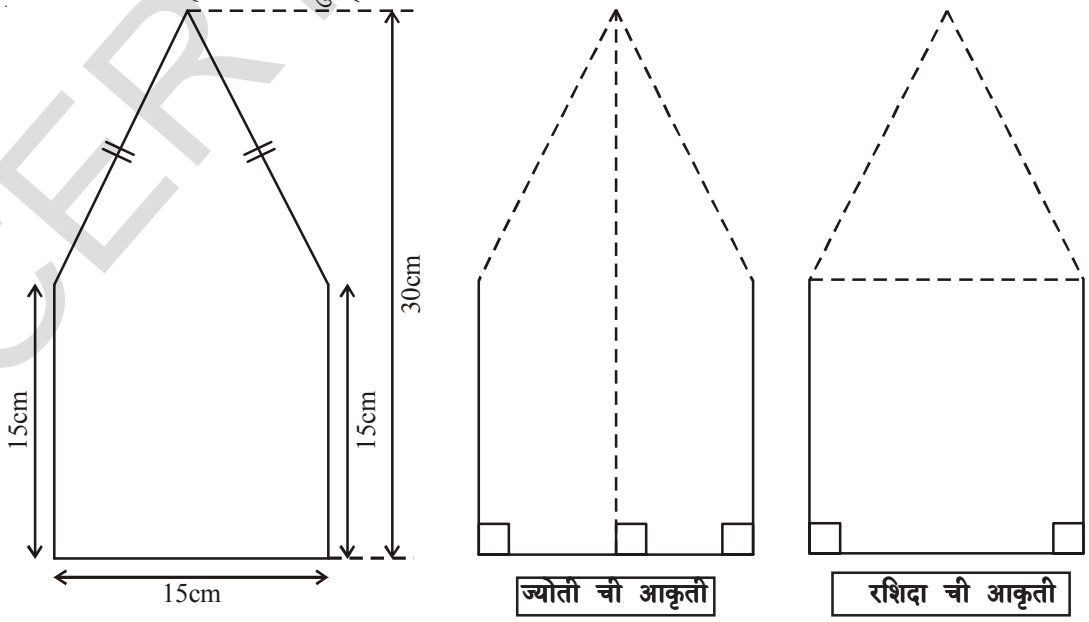


(ii)

6. समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजुच्या लांबीचे गुणोत्तर 5:3 आहे. आणि त्या मधील अंतर 16 सें.मी. आहे. जर समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ 960 सें.मी.^{2} असेल तर त्याच्या समांतर बाजुंची लांबी माहिती करा.

7. एका भवनाच्या जमीनीवर 3000 टाईल्स बसवण्यात आले आहे. जे की, समभुज चौकोनाच्या आकाराचे आहे आणि त्याच्याप्रत्येक कर्णाची लांबी 45 सें.मी. आणि 30 सें.मी. आहे. प्रत्येक टाईल्स ची किंमत 20 रुपये प्रती मी^{2} असेल तर पुर्ण टाईल्स बसविण्यासाठी किती रुपये खर्च आला.

8. आकृतीत दाखविलेले भाग पंचकोन आकाराचे आहे. त्याचे क्षेत्रफळ माहित करण्यासाठी ज्योती आणि रशिदा ने दोन वेगवेगळ्या पध्दतीचा उपयोग केला आहे. दोन्ही पध्दतीने क्षेत्रफळ माहित करा. तुम्ही काय निरिक्षण केले?

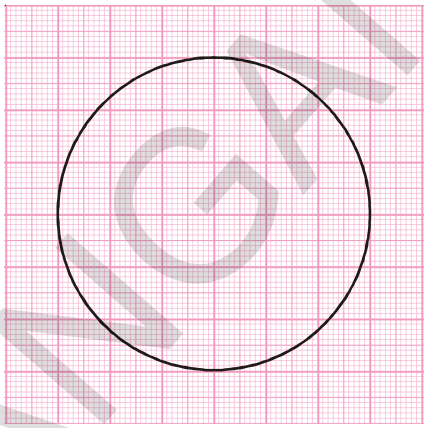


SCERT TELANGANA

9.6 वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

आलेख कागदाचा वापर करुन वर्तुळाचे क्षेत्रफळ माहित करु या.

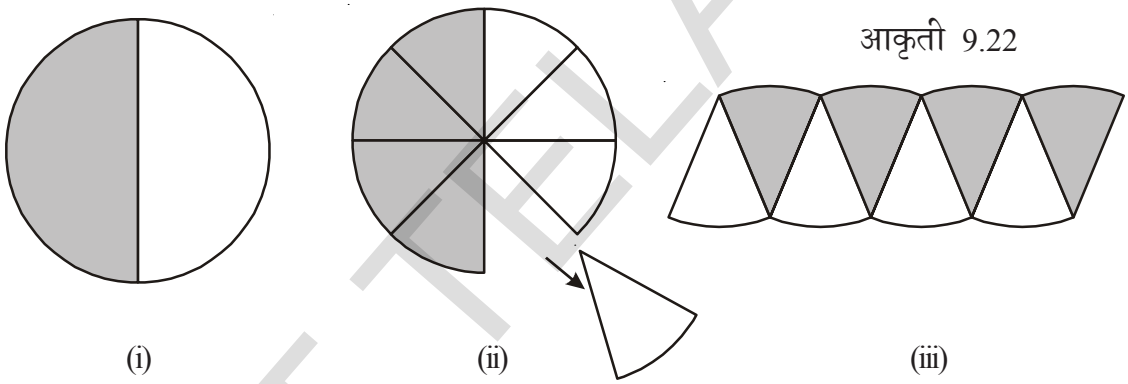
आलेख कागदावर 4 सें.मी. त्रिज्या असलेले एक वर्तुळ काढा. व्यापलेल्या चौरसाची संख्या मोजुन क्षेत्रफळ माहित करा



कडा सरळ नसल्याने या पध्दतीने आपण वर्तुळाचे क्षेत्रफळ अंदाजाने माहित करु शकतो.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ आणखी एका पध्दतीने सुध्दा माहित करु शकतो.

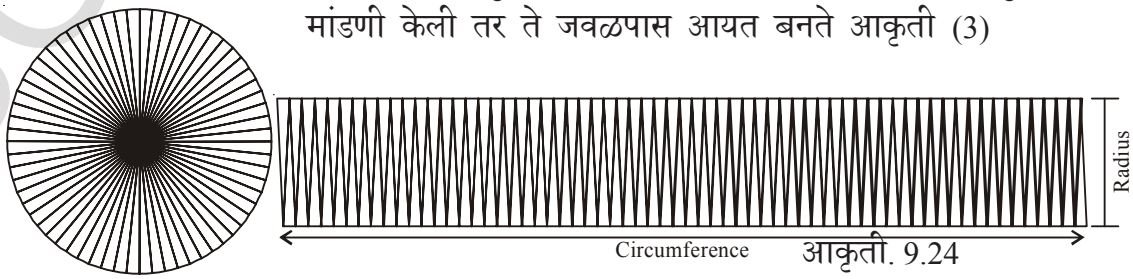
आकृती 9.22



आकृती 9.23

एक वर्तुळ काढा आणि त्या वर्तुळाच्या अर्ध्या भागाला रंग लावा (आकृती 9.23) आता त्या वर्तुळाला 8 सारख्या भागात विभागा आणि त्या घडी करुन कापा आकृती 9.23 (i) आणि (ii))

आकृती (2)मध्ये दाखविलेल्या प्रमाणे त्या पट्टयांना वेगवेगळ्या करुन मांडणी करा हे जवळपास समांतर भुज चौकोना सारखे दिसते. आपल्या जवळ जास्त व्दैत्रिज्या वर्तुळ खंड असल्याने वर केल्याप्रमाणे आपण योग्य समांतर भुज चौकोना पर्यंत पोहचु शकतो. जर आपण एक वर्तुळाला 64 व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडात विभागलो आणि त्या व्दैत्रिज्या वर्तुळ खंडाची मांडणी केली तर ते जवळपास आयत बनते आकृती (3)



आकृती. 9.24

SCERT TELANGANA

या आयताची रुंदी किती आहे ? या आयताची रुंदी ही वर्तुळाची त्रिज्या 'r' होय.

पुर्ण वर्तुळाला 64 व्दैत्रिज्या वर्तुळ खंडात विभागल्याने प्रत्येक बाजुला 32 व्दैत्रिज्या वर्तुळखंड होतात. आयताची लांबी हे 32 व्दैत्रिज्या वर्तुळाखंडाची लांबी होय. जे की, परिघा चे अर्धे होय. आकृती 9.24.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = अशा प्रकारे बनलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ

$= l \times b$

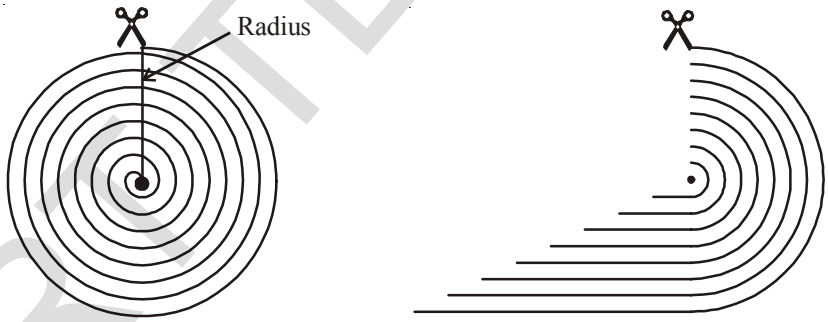
= (परिघाचे अर्धे) × त्रिज्या

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

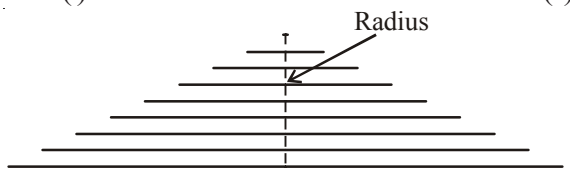
म्हणुन वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

दोरीने कृत्य

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ मोजण्याचे सुत्र $A = \pi r^2$ पर्यंत पोहचण्यासाठी तालमड चे टिका ग्रंथ (जॉ चे पुस्तक) मधील भाष्य हे उत्तम मार्ग आहे. एकच केंद्र असलेल्या धाग्याने वर्तुळाचा आतील भाग व्यापुन आहे. असे कल्पना करा. प्रत्येक गुंफ्याला ताट करा आणि आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे समव्दिभुज त्रिकोण बनविण्यासाठी त्याची मांडणी करा.



(i) (ii)



(iii)

समव्दिभुज त्रिकोणाचा पाया हा वर्तुळाच्या परिघा एवढा आहे आणि उंची हा वर्तुळाच्या त्रिज्या एवढा आहे.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times$ पाया × उंची

SCERT TELANGANA

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

$$= \pi r^2$$

$\therefore$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi r^2$ येथे r हे वर्तुळाची त्रिज्या आहे.

प्रयत्न करा. $\frac{22}{7} x \frac{7}{2} x \frac{7}{2}$

आलेख कागदा वर वेगवेगळ्या त्रिज्या चे वर्तुळ काढा. चौरसांची संख्या मोजुन क्षेत्रफळ माहित करा तसेच सुत्राचा वापर करुन क्षेत्रफळ माहित करा. दोन्ही उत्तरांचा तुलना करा.

उदाहरण 11: एका तारेला वाकवुन 27.5 सें.मी. बाजु असलेले चौरस च्या रुपात आहे. त्या तारेला ताठ केले आणि वाकवुन वर्तुळाच्या रुपात आणले. तयार झालेल्या वर्तुळाची त्रिज्या किती असेल.?

सोडवणुक: तारेची लांबी = चौरसाची परिमीती

$= (27.5 \times 4)$ सें.मी. $= 110$ सें.मी.

जेव्हा तारेला वाकवुन वर्तुळाच्या रुपात आणतो तेव्हा ते वर्तुळाचे परिघ दर्शविते जे की 110 सें.मी.आहे.

या वर्तुळाची त्रिज्या r समजु

तर परिघ $= 2 \times \frac{22}{7} \times r$ सें.मी.

$= r$ सें.मी.

$110 = r$

$\Rightarrow r = \frac{110 \times 7}{44}$ सें.मी.

$= 17.5$ सें.मी.

उदाहरण 12: एका वर्तुळाची परिघ 22 सें.मी. आहे त्याचे क्षेत्रफळ माहित करा आणि तसेच अर्धवर्तुळोच क्षेत्रफळ माहित करा.

Solution: वर्तुळाची त्रिज्या r सें.मी. समजु

तर परिघ $= 2\pi r$

$\therefore 2\pi r = 22$

SCERT TELANGANA

$2 \times \quad \times r = 22$

$r = 22 \dfrac{7}{44} = 3.5$ सें.मी.

वर्तुळाची त्रिज्या $= 3.5$ सें.मी.

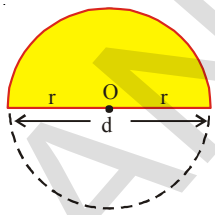
वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $\pi r^2 = \left(\dfrac{22}{7} \times \dfrac{7}{2} \times \dfrac{7}{2}\right)$

$= 38.5$ सें.मी.^{2}

अर्धे वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \dfrac{1}{2}\pi r^2$.

अर्धवर्तुळाचे क्षेत्रफळ म्हणजे काय?

वर्तुळाच्या व्यासावरुन वुर्तळाला घडी करा. आणि त्या एका भागाला रंगविलेला समजा



रंगविलेले भाग हा वर्तुळाचा क्षेत्रफाळाचा 1/2 भाग आहे का?

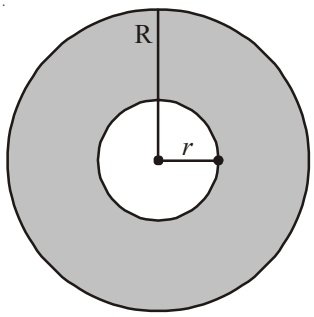
वर्तुळाच्या 1/2 भागाचे क्षेत्रफळ

$= \dfrac{1}{2}\pi r^2$

अर्धा वर्तुळाची परिमीती काय आहे?

9.7 वर्तुळाकार रस्त्याचे क्षेत्र किंवा रिंग चे क्षेत्रफळ

एका बगिच्यात वर्तुळाकार रस्ता आहे. जे आकृतीत दाखविलेले आहे. त्याच्या बाहेरील वर्तुळाला आणि आतिल वर्तुळाला एकच केंद्र आहे. तर या वर्तुळाकार रस्त्याचे क्षेत्रफळ माहित करु या.



बाहेरील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ आणि आतील वर्तुळाचे क्षेत्रफळाचा फरक म्हणजे वर्तुळाकार रस्त्याचे क्षेत्रफळ होय.

जर आपण बाहेरील वर्तुळाच्या त्रिज्येला 'R' आणि आतिल वर्तुळाच्या त्रिज्येला 'r' म्हणलो तर

वर्तुळाकार रस्त्याचे क्षेत्रफळ = बाहेरील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ – आतील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi R^2 - \pi r^2$

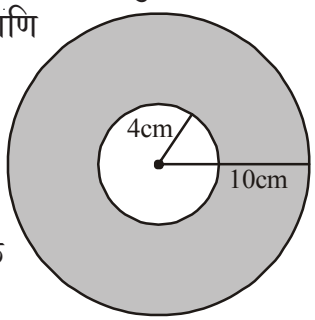
$= \pi (R^2 - r^2)$

म्हणुन

वर्तुळाकार रस्त्याचे क्षेत्रफळ किंवा रिंग चे क्षेत्रफळ $= \pi (R^2 - r^2)$ or $\pi (R + r)(R - r)$

येथे R, r हे अनुक्रमे बाहेरील वर्तुळ आणि आतील वर्तुळाचे त्रिज्या आहेत.

उदाहरण:13 बाजुच्या आकृतीचे निरिक्षण करा. येथे दिसत असलेल्या दोन्ही वर्तुळाला एकच केंद्र आहे. मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या 10 सें.मी. आहे आणि लहान वर्तुळाची त्रिज्या 4 सें.मी. आहे.



(i) मोठ्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

(ii) लहान वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

(iii) दोन वर्तुळा मधील रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ

($\pi = 3.14$ घ्या)

SCERT TELANGANA

सोडवणुक: (i) मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या = 10 सें.मी.

म्हणुन मोठया वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ सें.मी.^{2}

(ii) लहान वर्तुळाची त्रिज्या = 4 सें.मी.

म्हणुन लहान वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

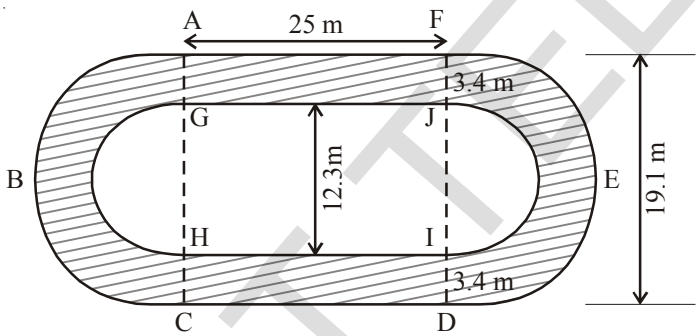
$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ सें.मी.^{2}

(iii) रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ = मोठ्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ - लहान वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$= (314 - 50.24)$ सें.मी.^{2}

$= 263.76$ सें.मी.^{2}.

उदाहरण 14: खाली दाखविलेल्या आकृती मधील रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.



$R = \frac{19.1}{2} = 9.55$

$r = \frac{12.3}{2} = 6.15$

सोडवणुक: रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ = AGJF आयाताचे क्षेत्रफळ + HCDI आयताचे क्षेत्रफळ + ABCHG अर्धवर्तुळाकार रिंग चे क्षेत्रफळ + DEFJI अर्धवर्तुळाकार रिंग चे क्षेत्रफळ

AGJF आयताचे क्षेत्रफळ = $25 \times 3.4 = 85$ m^2.

HCDI आयताचे क्षेत्रफळ = $25 \times 3.4 = 85$ m^2.

ABCHG अर्धवर्तुळाकार रिंगचे क्षेत्रफळ= $\frac{}{2}[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{2 \times 7}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

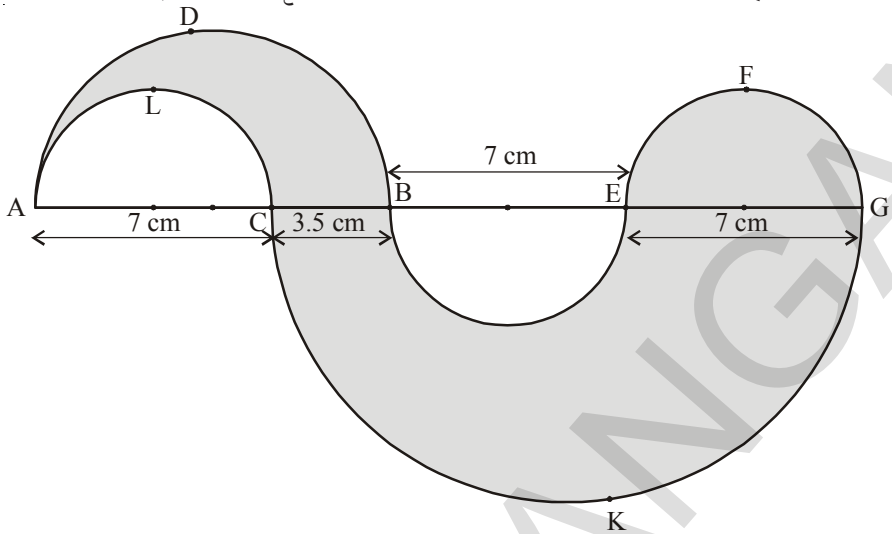
DEFJI अर्धवर्तुळाकार रिंगचे क्षेत्रफळ = $\pi[(R^2 - r^2)] = \frac{22}{2 \times 7}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

$= (25 \times 3.4) + (25 \times 3.4) + \pi[(9.55)^2 - (6.15)^2] + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

$= [85 + 85 + \frac{22}{7} \times 15.7 \times 3.4]$मी^{2} $= (170 + 167.77)$m^2 $= 337.77$मी^{2}

SCERT TELANGANA

उदाहरण 15: खाली दिलेल्या आकृतीत रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.



सोडवुणक: रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ = ADBCLA चे क्षेत्रफळ + EFGE चे क्षेत्रफळ+ BEGKCB चे क्षेत्रफळ

$$= \frac{1}{2}\times\pi\left[\left(\frac{10.5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{17.5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right]\text{ cm}^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{35}{4}\times\frac{7}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{49}{4}\right)\text{ cm}^2$$

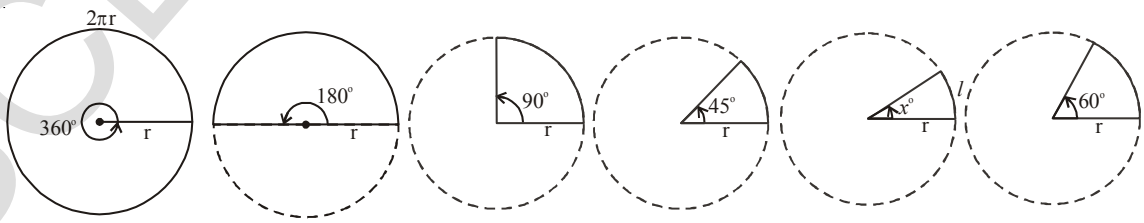
$$= \left(\frac{385}{16}+\frac{77}{4}+\frac{1617}{16}\right)\text{ सें.मी.}^2$$

$$= \left(\frac{2310}{16}\right)\text{ सें.मी.}^2$$

$$= 144.375\text{ सें.मी.}^2$$

9.8 कंसाची लांबी

खालील वर्तुळाचे निरिक्षण करुन तक्ता पुर्ण करा.



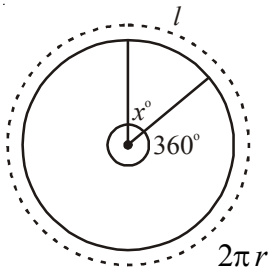
(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

SCERT TELANGANA

आकृती	कोन	कंसाची लांबी	कोन आणि कंसाच्या लांबी मधील संबंध
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	_____
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	_____
(v)	x^o	_____	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r = l$
(vi)	60^0	$\frac{\pi r}{3}$	_____

वरील निरिक्षणा वरुन व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाच्या कंसाची लांबी (l) $\frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ इथे 'r' वर्तुळाची त्रिज्या आहे आणि व्दैत्रिज्या वर्तुळाखंडाच्या कंसाच्या समोर केंद्रावर 'x' हा कोन आहे.

जर वर्तुळखंडाच्या कंसाची लांबी l असेल



$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

तर $$l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$$

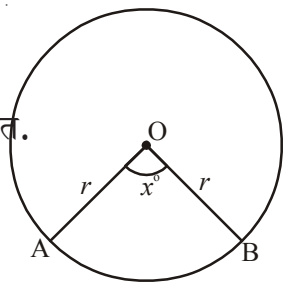
9.9 व्दैत्रिज्या वर्तुळाखंडाचे क्षेत्रफळ

दोन त्रिज्या आणि एक कंसा ने मर्यादीत केलेल्या वर्तुळाच्या भागाला व्दैत्रिज्या वर्तुळखंड म्हणतात.

त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $r = \pi r^2$

व्दैत्रिज्या वर्तुळाखंडाच्या कंसाच्या समोर केंद्रावर x^0 हा कोन आहे.

व्दैत्रिज्या वर्तुळ खंडाचे क्षेत्रफळ आणि त्याचा कोन सम प्रमाणात आहेत.



$\therefore$ व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ: वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= x^o : 360^o$

OABव्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ $= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

SCERT TELANGANA

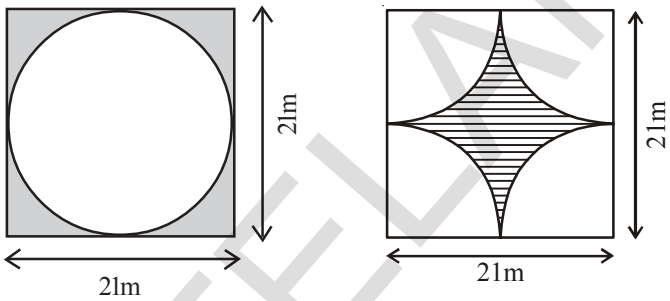
म्हुणन OABव्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ $= \frac{x^o}{360^o} \times \pi r^2$ [$\because \pi r^2 = \pi r \times \frac{2r}{2}$]

$$= \frac{x^o}{360^o} \times 2\pi r \times \frac{r}{2}$$

$$= l \times \frac{r}{2}$$

$$A = \frac{lr}{2}$$ (l हे कंसाची लांबी आहे.)

उदाहरण 13: खालील प्रत्येक आकृतीत रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



सोडवणुक: **(i)** रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ

={21 मी बाजु असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ} – {21 मी. व्यास असलेल्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ}

जर वर्तुळाचा व्यास 21 मी असेल

तर वर्तुळाची त्रिज्या $= \frac{21}{2}$ =10.5मी.

रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ $= (21 \times 21) - \left(\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$ मी.^{2}

$= 441 - 346.5$

$= 94.5$ मी.^{2}

(ii) रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ = {21 मी. बाजु असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ} – {4×व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ}

$= (21 \quad 21) - \left(4 \times \frac{90^o}{360^o} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$ मी^{2}

(जर व्यास 21 मी. असेल तर त्रिज्या $\frac{21}{2}$ मी.)

SCERT TELANGANA

$$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$$

$$= (441 - 346.5) \text{ मी}^2$$

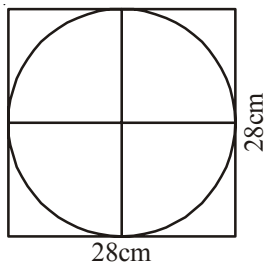
$$= 94.5 \text{ मी}^2$$

अभ्यास - 9.2

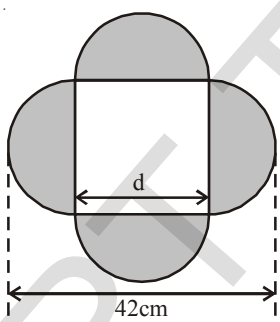
1. 36 सें.मी. 25 सें.मी. आयताकार क्रॉलिक शिट आहेत . त्यामधुन 3.5 से.मी. व्यासाचे 56 वर्तुळाकार बटन कापल`तर उरलेल्या शिट चे क्षेत्रफळ माहित करा.

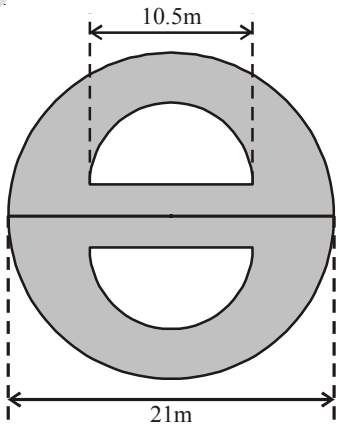
2. 28 सें.मी. बाजु असलेल्या चौरसाचे अंर्तवर्तुळाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

[**सुचना** : वर्तुळाचा व्यास हा चौरसाच्या बाजु एवढा आहे.]



3. खालील प्रत्येक चित्रात रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.



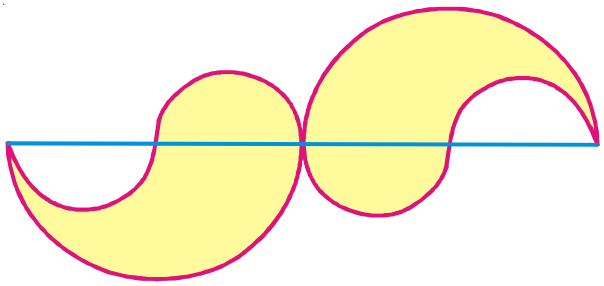


[**सुचना**: $d + \quad + \frac{d}{2} = 42$]

$d = 21$

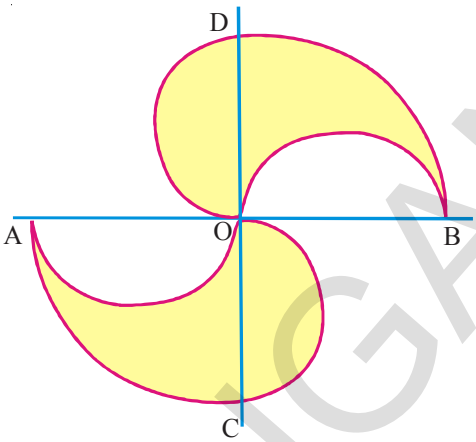
$\therefore$ चौरसाची बाजु 21सें.मी.

4. बाजुच्या आकृतीत सारख्या त्रिज्याचे चार लहान अर्धवर्तुळ आणि सारख्या त्रिज्येचे (प्रत्येकी 42 सें.मी.)दोन मोठे वर्तुळ आहेत. तर रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

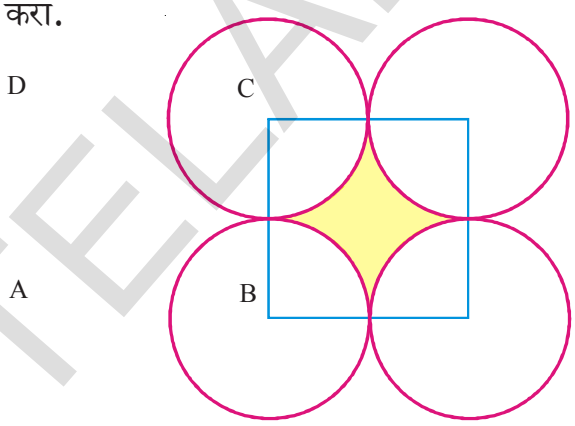


SCERT TELANGANA

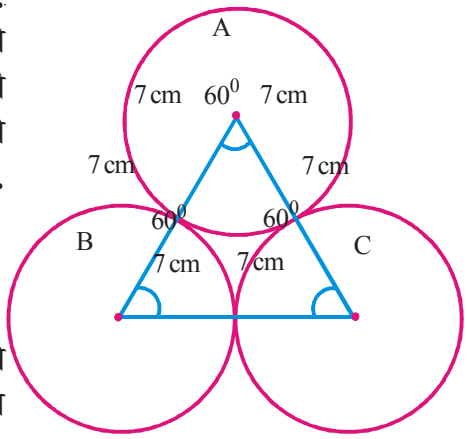
5. बाजुच्या आकृतीमध्ये चार अर्धे वर्तुळ आणि दोन एक चतुर्थांश वर्तुळ आहेत. जर OA = OB = OC = OD = 14 सें.मी. रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.



6. बाजुच्या आकृतीमध्ये A, B, C आणि D हे जोडीमध्ये बाहेरुन स्पर्श करीत असलेल्या सारख्या वर्तुळाचे केंद्रबिंदु आहेत. आणि 7 सें.मी. बाजु असलेली ABCD हा चौरस आहे. रंगविलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.



7. समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 49 सें.मी.^{2} आहे. कोनीय बिंदु केंद्र समजुन बाजुच्या आकृती मध्ये दाखविल्या प्रमाणे त्रिकोणाच्या बाजुची अर्धी लांबी त्रिज्या घेऊन त्या केंद्रावरुन वर्तुळ काढा. वर्तुळामध्ये समाविष्ट नसलेल्या त्रिकोणाच्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

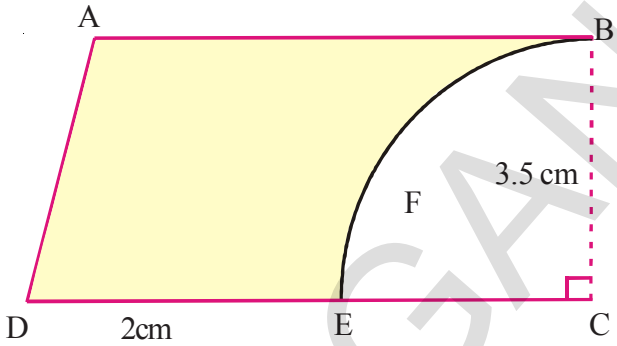


8. (i) त्रिज्या 'a' एकमेकांस स्पर्श करत असलेले सारखे चार वर्तुळ आहेत. त्यामधील क्षेत्रफळ माहित करा.

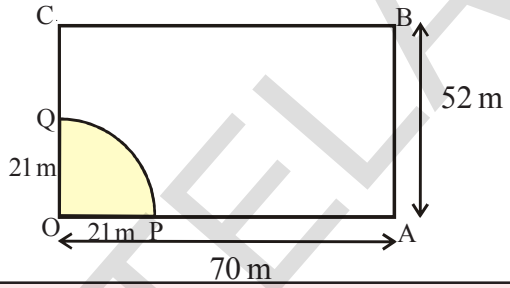
(ii) चौरसाच्या चार कोपऱ्यातुन असे चार सारखे वर्तुळ काढले की प्रत्येक वर्तुळ इतर दोन वर्तुळाला स्पर्श करीत आहेत. चौरसाची प्रत्येक बाजु 14 सें.मी.आहे. तर वर्तुळाच्या परिघां मधील जागेचे क्षेत्रफळ माहित करा.

SCERT TELANGANA

9. एका कार्डबोर्ड च्या तुकड्या वरुन ABCD, समलंब चौकोनाच्या आकारामध्ये आहे आणि AB||CD आणि $\angle BCD = 90^0$, एक चतुर्थांश वर्तुळ काढुन टाकला AB = BC = 3.5 सें.मी.आणि DE = 2 सें.मी. दिलेले आहे. कार्ड बोर्ड च्या उरलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा(π बरोबर $\frac{22}{7}$ घ्या)



10. एका घोड्याला 70 मी × 52 मी च्या आयताकार शेतात एका कोपऱ्यात 21 मी लांब दोरीने चरण्यासाठी बांधुन ठेवले कतर तो कीती भाग चरु शकतो.?



आपण काय चर्चा केलो.

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = (समांतर बाजुच्या लांबीची बेरीज) × (त्या मधील अंतर)

- चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × कर्णाची लांबी × उरलेल्या दोन शिरोबिंदु तुन कर्णावर टाकेलेल्या लंब रेषेच्या लांबीची बेरीज)
- समभुज चौकानाचे क्षेत्रफळ = कर्णाच्या गुणाकाराच्या अर्धे
- वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2 येथे 'r' हा वर्तुळाची त्रिज्या आहे.
- वर्तुळाकार रस्त्याचे क्षेत्रफळ (किंवा) रिंगचे क्षेत्रफळ = $\pi(R^2 - r^2)$ किंवा $\pi(R + r)(R-r)$ जेव्हा R, r हे अनुक्रमे बाहेरील वर्तुळ आणि आतील वर्तुळ चे त्रिज्या असते.
- व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडा = $\frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$ येथे r हा वर्तुळाची त्रिज्या आहे . आणि व्दैत्रिज्या वर्तुळखंडाच्या कंसाच्या समोर केंद्रावर x° हा कोन आहे.

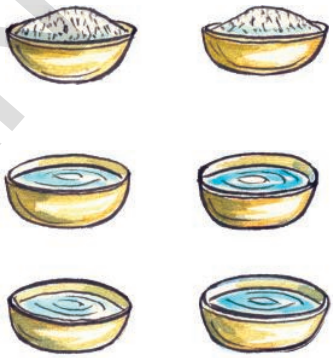
  $A = \frac{lr}{2}$

SCERT TELANGANA

थडा 10

सम आणि व्यस्त प्रमाण

10.0 प्रस्तावना



गोपी 4 कप पाणी 2 कप तांदुळ शिजविण्यासाठी दररोज वापरतो. आज जेव्हा काही पाहुन त्याच्या घरी आले आहेत, तेव्हा त्याला 6 कप तांदुळ शिजविण्याचे आहेत. त्याला किती कप पाण्याची गरज 6 कप तांदुळ शिजविण्यासाठी आहे ?

अशा प्रकारचे अनेक उदाहरणे आपल्या दैनंदिन जिवनात येतात. जेथे आपणास आढळुन येते की, एका राशीतील बदल दुसऱ्या राशीत देखील बदल आणतो. उदाहरण पहा.

(i) जर आधिक विद्यार्थ्यांची संख्या तुमच्या शाळेत नोंद झाली तर दुपारच्या जेवण्यासाठी किती राशीची गरज राहील आणि काय घडणार ? आधिक राशीची गरज राहील.

(ii) जर तुम्ही बँकेमध्ये अधिक रक्कम जमा केली तर तुम्हाला मिळालेल्या व्याजा बद्दल काय म्हणु शकता ? निश्चितच मिळविलेले व्याज देखील अधिक राहील.

(iii) एकुण खरेदी किंमतीचे काय होईल जर विकत घेतलेल्या वस्तुची संख्या कमी होत असेल ? स्पष्टपणे खरेदी किंमत कमी होईल.

(iv) 20 चायपत्ती पॉकेटचे वजन काय आहे, जर 40 चाय पत्तीचे पॉकेट चे वजन 1.6 कि.ग्रा. आहे ? स्पष्टपणे 20 चायपत्तीच्या पॉकेटचे वजन कमी राहणार.

वरील उदाहरणात आपल्याला आढळते की एका राशीतील बदल दुसऱ्या राशीत देखील बदले आणते.

हे करा

आणखी पाच उदाहरणे घेऊन सांगा की एका राशीतील बदल हे दुसऱ्या राशीत देखील बदल घडविते.

गोपीला गरज असलेली पाण्याची राशी तुम्ही कशी माहित करणार ? याचे उत्तर देण्यासाठी आता आपण काही वेगवेगळ्या प्रकारचे उदाहरण अभ्यास करणार आहोत.

SCERT TELANGANA

10.1 सम प्रमाण

वन मोहत्सवाच्या संदर्भात एका शाळेच्या प्रमुखाने रोपांची लागवड करण्याचे ठरविले. प्रत्येक वर्गाच्या प्रमुखांची संख्या खाली मांडली आहे.

वर्ग	VI	VII	VIII	IX	X
विद्यार्थ्यांची संख्या	5	7	10	12	15

प्रत्येक विद्यार्थ्यांला दोन रोपटे लावायचे आहे. प्रत्येक वर्गाला किती रोपटे लावावे लागतील हे माहित करा.

वर्ग	VI	VII	VIII	IX	X
विद्यार्थ्यांची संख्या	5	7	10	12	15
आवश्यक रोंपाची संख्या	10	14	20	24	30

आवश्यक असलेल्या रोपांबद्दल तुम्ही काय म्हणु शकता ? गरज असलेल्या रोंपाची संख्या आणि विद्यार्थ्यांची संख्या मधील बदल कशा प्रकारचा असतो ? दोन्ही वाढत आहेत किंवा घटत आहेत.

$\dfrac{\text{रोपे लावत असलेल्या विद्यार्थ्यांचे संख्या}}{\text{एकुण विद्यार्थी}} = \dfrac{10}{5} = \dfrac{14}{7} = \dfrac{20}{10} = \ldots\ldots = \dfrac{2}{1} = 2$ हे स्थिर संख्या आहे. त्याला स्थिर प्रमाण म्हणतात.

जसे गुणोत्तर समान आहेत या बदलला आपण सम प्रमाण म्हणतो.

जर x आणि y कोणत्याही दोन राशी आहेत. दोन्हीही अशा प्रकारे आहे की दोन्हीही एकत्र वाढतात किंवा कमी होतात आणि $\dfrac{x}{y}$ स्थिर राहते. (म्हणा k)तेव्हा आपण म्हणतो की x आणि y सम प्रमाणात आहेत त्याला असे लिहले जाते. $x \propto y$ आणि असे वाचले जाते की, x सम प्रमाण y च्या आहे. $\therefore \dfrac{x}{y} = k \Rightarrow x = ky$ येथे k हे स्थिरांक प्रमाण आहे.

जर y_1 आणि y_2 या y च्या अनुसार किंमती आहेत. तसेच x_1 आणि x_2 या x च्या आहेत,म्हणुन $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$

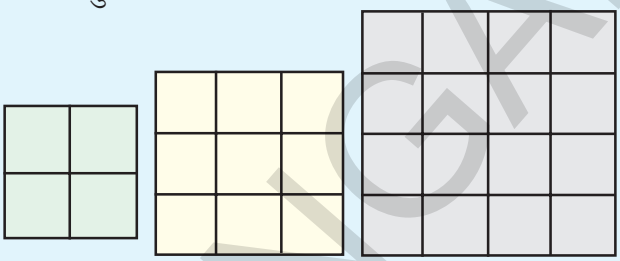
SCERT TELANGANA

हे करा

असे तिन उदारहणे लिहा जेथे तुम्ही सम प्रमाण पाहतो.

2. चला गृहीत धरु या की, वेगवेगळ्या चौरसाच्या बाजुचे वर्ग 2,3,4 आणि 5 सें.मी. तर चौरसाचे क्षेत्रफळ काढुन खालील जागा भरा.

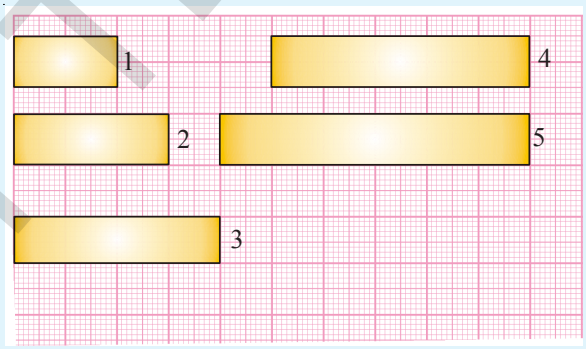
सें.मी. मध्य बाजु	(सें.मी.)^2 मध्ये क्षेत्रफळ
2	
3	
4	
5	



तुम्हाला काय दिसुन आले ? तुम्हाला चौरसाच्या क्षेत्रफळा मध्ये बदल हे त्याच्या बाजुच्या बदलामुळे होतो का ? समोर चौरसाचे क्षेत्रफळ माहित करा, बाजुची लांबी घेऊन काढा. गुणोत्तर समान आहे का ? स्पष्टपणे नाही.

∴ हा बदल म्हणजे सम प्रमाण नाही.

3. एका ग्राफ कागदावर काढलेले समान रुंदीचे आयत खाली दिलेले आहेत. प्रत्येक आयताचे क्षेत्रफळ काढा आणि खालील तक्ता भरा.



आयत	1	2	3	4	5
लांबी (सें.मी.)					
क्षेत्रफळ (सें.मी.^{2})					

क्षेत्रफळ लांबीच्या सम प्रमाणात आहेत का ?

4.. एक ग्राफ कागद घ्या आणि समान लांबीचे वेगळ्या जाडीचे सारखे आयत काढा. प्रत्येकाचे क्षेत्रफळ काढा तुम्ही त्याच्या क्षेत्रफळ आणि रुंदी बद्दल काय निर्षक काढु शकता ?

SCERT TELANGANA

उदाहरण1: सारख्या 65 चायपत्ती पॉकेटची किंमत 2600 रुपये असेल तर तशाच प्रकारच्या 75 चायपत्ती पॉकेटची किंमत काय होईल हे सांगा ?

सोडवणुक: आपणास माहित आहे की, जर विकत घेतलेल्या चायपत्ती पॉकेटची संख्या वाढल्यास त्याची किंमत देखील वाढेल. म्हणुन चायपत्ती पॉकेटची किंमत त्याच्या संख्ये बरोबर बदलते.

चायपत्ती पॉकेटची संख्या (x)	65	75
किंमत (y)	2600	?

म्हणुन $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ येथे $x_1 = 65$ $y_1 = 2600$ $x_2 = 75$ $y_2 = ?$

मांडणी केल्याने $\frac{65}{2600} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 2600}{65} =$ 3000 रुपये

अशा 75 चायपत्ती पॉकेटची किंमत 3000 रुपये होते.

उदाहरण 2: एका रेल्वे स्थानकाचे कार पार्किंग ठेवण्याचे भाव खालील प्रमाणे दिले आहेत.

	तासाची संख्या (x)	पार्किंग दर (y)
पर्यंत	4 तास	60 रुपये
	8 तास	100रुपये
	12 तास	140रुपये
	24 तास	180रुपये

पडताळणी करा की गाडी ठेवण्याचे भाव आणि गाडी ठेवण्याचे तास सम प्रमाणात आहेत का नाही.

सोडवणुक: आपल्याला दिसुन येते की दोन्ही किंमती हळुहळु वाढत आहेत.

ते सम प्रमाणात आहेत का? $\frac{x}{y}$ ची किंमत काय होईल ?

जर हे स्थिरांक आहे तर ते समप्रमाण आहेत. नाहीतर ते सम प्रमाण नाहीत. चला या खालील संदर्भात पाडताळुन पहा.

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{60}, \frac{8}{100}, \frac{12}{140}, \frac{24}{180}$$

तुम्ही अगदी सोप्या पध्दतीने निरिक्षण करु शकता की ते समान गुणोत्तर नाहीत. म्हणुन ते समप्रमाण नाहीत

उदाहरण 3: एक 8 मीटर च्या स्तंभाची 10 मीटर लांब सावली पडते. तुम्ही एका झाडाची लांबी माहित करा. ज्याची 40 मी.सावली अशाच परिस्थितीत पडते.

SCERT TELANGANA

सोडवणुक: सावलीची लांबी त्याच्या स्तंभाच्या उंचीप्रमाणे बदलते.

म्हणुन $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ येथे $x_1 =$ 8मी. $y_1 =$ 10मी. $x_2 = ?$ आणि $y_2 =$ 40मी.

मांडणी करा $\frac{8}{10} = \frac{x_2}{40} \Rightarrow x_2 = \frac{8 \times 40}{10} = 32$ मी

म्हणुन झाडाची उंची 32 मीटर आहे.

उदाहरण 4: जर एक पाईप एका टाकीला ज्याची क्षमता 50 लिटर आहे. त्याला 5 तासात भरु शकते. तर 75 लिटरक्षमता असलेल्या टाकीला भरण्यासाठी किती तास लागतील.

सोडवणुक: टाकीतील पाण्याचे घनफळ $\propto$ भरण्यासाठी लागलेला वेळ

म्हणुन येथे $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ येथे $x_1 = 50\,l$ $y_1 =$ 5तास $x_2 = 75\,l$ लिटर $y_2 = ?$

$\frac{50}{5} = \frac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{75 \times 5}{50} = \frac{\cancel{375}^{15}}{\cancel{50}_{2}} = 7\frac{1}{2}$ तास

75 लिटर क्षमता असलेली टाकी भरण्यासाठी लागलेला वेळ $7\frac{1}{2}$ तास

उदाहरण 5: जर 20 मीटर कापडाची किंमत 1600 रुपये आहे. तर 24.5 मीटर कापडाची किंमत काय होईल.

सोडवणुक: कापडाच्या लांबीच्या अनुसार किंमत सम रुपात बदलते.

म्हणुन $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ येथे $x_1 = 20$ मी

$y_1 =$ 1600रुपये $x_2 = 24.5$ मी आणि $y_2 = ?$

मांडणी करुन $\frac{20}{1600} = \frac{24.5}{y_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1600 \times 24.5}{20} =$ 1960रुपये

24.5 मिटर कापडाची किंमत 1960 रुपये आहे.

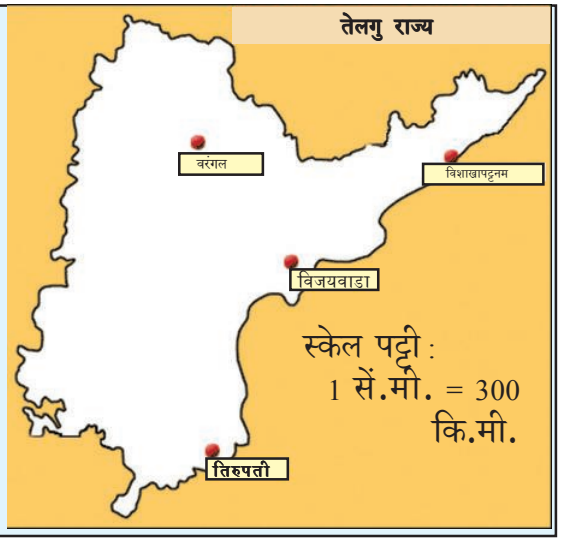
हे करा

दिलेल्या नकाशात अंतर मोजा आणि तो मुळ अंतर घेऊन खालील मधील अंतर काढा. (i) विजयवाडा आणि विशाखापट्टनम (ii) तिरुपती आणि वरंगल येथे नकाशाची स्केलपट्टी 1 : 30000000 गुणोत्तर आहे.

Scale shows how lengths between two cities are reduced in drawing

Scale : 1 cm = 300 km

Convert scale to ratio or 1 cm : 30000000 cm using centimetres as common unit.



SCERT TELANGANA

अभ्यास - 10.1

1. एका 5 मीटर कापडाची किंमत 210 रुपये आहे. तर तशाच विशिष्ट कापडाची दर्जाच्या किंमत काय होईल.(i) 2 मी (ii) 4 मी (iii) 10 मी (iv) 13 मीटर

2. खालील तक्ता भरा

सेपाची संख्या	1	4	7	12	20
सेपाची किंमत (रुपये मध्ये)	8	.....	.....	.....	.....

3. 48 पोते धानाची किंमत 16800 रुपये आहे. तर 36 पोते धानाची किंमत किती.

4. 4 सदस्य असलेल्या एका कुटुंबाचा महिण्याचा खर्च 2800 रुपये आहे. तर फक्त 3 सदस्य असलेल्या एका कुंटुंबाची महिण्याचा खर्च किती होईल.

5. 28 मीटर लांबी असलेल्या एका जहाच्या झेंडाची उंची 12 मी. आहे. जर एका नमुना जहाजावर असलेल्या झेंडाची उंची 9 सें.मी. आहे. तर त्या नमुना जहाजाची लांबी काय होईल ?

6. 5 मी. 60 सें.मी. असलेल्या एका उभ्या स्तंभाची सावली 3 मीटर 20 सें.मी. लांब पडते. त्याच वेळी माहित करा (i) 10 मी. 50 सें.मी. असलेल्या दुसऱ्या स्तंभाची सावलीची लांबी काढा.(ii) स्तंभाची उंची काढा ज्याची सावतली 5 मी. लांब आहे.

7. एक माल भरुन असले ट्रक 14 कि.मी. 25 मिनीटात प्रवास करते जर वेळ सारखाच असेल तर ते ट्रक 5 तासात किती अंतर प्रवास करु शकते?

8. 12 जाड कागदाचे वजन 40 ग्राम आहे. तर किती कागदाचे वजन $16\frac{2}{3}$ कि.ग्रा. भरेल ?

9. एक रेलगाडी 75 कि.मी. / तास सारख्या वेगाने धावते तर
   (i) 20 मीनीटात ते किती अंतर धावेल ?
   (ii) 250 कि.मी. अंतर जाण्यासाठी रेलगाडीला किती वेळ लागतो.

10. एका योजना सुक्ष्म चिप ची स्केल पट्टी 40.1 आहे. योजनेची लांबी 18 सें.मी. आहे. तर त्याची मुळ लांबी काढा.?

प्रकल्प कार्य

1. भारताचा नकाशा घ्या. तेथे वापरलेली स्केलपट्टीची नोंद करा. स्केल पट्टीचा वापर करुन नकाशातील कोणत्याही दोन शहरामधील अंतर काढा. दोन्हीच्या मधील मुळ अंतर माहित करा.

2. 5 लोकांसाठी हलवा बनविण्यासाठी खालील सामग्रीची गरज आहे. रवा = 250 ग्राम, साखर = 300 ग्राम, तुप = 200 ग्राम, पाणी= 500 लिटर प्रमाणाताचा मुद्दा वापरुन तुमच्या वर्गासाठी हलवा बनविण्यासाठी सामग्रीचा अंदाज लावा.

SCERT TELANGANA

10.2व्यस्त प्रमाण

एका पार्सल कंपनीजवळ निश्चित संख्येचे पार्सल पाठवयाचे आहेत. जर ती कंपणी 36 माणसांना कामावर लावते, तर ते 12 दिवस घेतात. जर फक्त 18 माणसे कामावर आहेत तर काम पुर्ण होण्यासाठी 24 दिवस लागतात. तुम्ही पाहा जेव्हा माणसांना अर्धे कले तर वेळ दुप्पट लागतो. जर कंपणी 72 माणसांच्या कामावर लावते तर वेळ आर्धा लागेल का ?

हो, निश्चितच लागेल, चला तक्त्यावर एक नजर टाका.

÷2 ÷4 ×2 ×3

माणसांची संख्या	36	18	9	72	108
घेतलेला वेळ	12	24	48	6	4

×2 ×4 ÷2 ÷3

जर कंपणीला एकाच दिवसात पार्सल पाठवायचे असते तर त्याला किती लोकांना कामावर घ्यावे लागेल ?

दोन्ही राशी अशा पध्दतीने बदलतात की, जर एक राशी वाटते तर दुसरी राशी कमी होते. एकाच गुणोत्तरात होते. आणि त्या उलट याला व्यस्त प्रमाण म्हणतात. वरील उदाहरणात कामावर लावलेल्या माणसांची संख्या आणि दिवसांची संख्या ह्या एकमेकांस व्यस्त प्रमाणात असतात.

चिन्हाव्दारे याला असे दर्शविले जाते.

लागलेल्या दिवसाची संख्या $\propto \dfrac{1}{\text{number of persons engaged}}$

जर x आणि y व्यस्त प्रमाणात असतील तर $x \propto \dfrac{1}{y}$

$x = \dfrac{k}{y}$ जेथे k हा प्रमाणाचा स्थिरांक आहे.

$xy = k.$

जर y_1 आणि y_2 या y च्या किंमती आहेत. या सारख्या x_1 आणि x_2 चा x किंमती अनुक्रमे आहेत

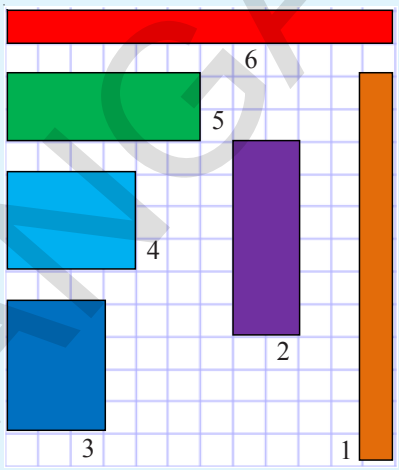
तर म्हणुन $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k), किंवा $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_2}{y_1}$.

SCERT TELANGANA

हे करा

1. तीन परिस्थीती लिहा जेथे तुम्ही व्यस्त प्रमाण पाहतो.
2. वेगवेगळे प्रमाण असलेले आयत एका चौरसाकृती कागदावर 12 लगतच्या बाजु घेऊन बनवायाचे आहे. प्रत्येक आयताची लांबी आणि रुंदी काढा. खालील तक्त्यात किंमतीची नोंद करा.

आयताची संख्या	**लांबी** (सें.मी.मध्ये)	**रुंदी** (सें.मी.मध्ये)	**क्षेत्रफळ** (चौ.सें.मी.)
1	L1.....	B1.....	.....
2	L2.....	B2.....	.....
3	L3.....	B3.....	.....
4	L4.....	B4.....	.....
5	L5.....	B5.....	.....
6	L6.....	B6.....	.....



तुम्हाला काय आढळते ? जशी लांबी वाढते तशी रुंदी कमी होते आणि त्या उलट होते. (स्थिर क्षेत्रफळासाठी).

लांबी आणि रुंदी एकमेकांशी व्यस्त प्रमाणात आहेत का ?

उहाहरण 6: जर 36 कामगार एक भिंत 12 दिवसात बांधु शकतात तर 16 कामगार तिच भिंत बांधण्यासाठी किती दिवस लागतील ?

सोडवणुक: जर कामगारांची संख्या कमी होते तेव्हा भिंत बांधण्यासाठीची वेळ वाढते. ते समप्रमाण च्या व्यस्त प्रमणात बदलते.

म्हणुन येथे $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ येथे $x_1 = 36$ कामगार

$y_1 = 12$ दिवस $x_2 = 16$ कामगार आणि

$y_2 = ?$ दिवस

कामगाराची संख्या	दिवसाची संख्या
36	12
16	y_2

मांडल्यास, $\frac{36}{16} = \frac{y_2}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{12 \times 36}{16} = 27$ दिवस

म्हणुन 16 कामगार तिच भिंत 27 दिवसात बनविणार.

म्हणुन कामगारांची संख्या कमी होत आहे.

$36 \div x = 16 \Rightarrow x = \frac{36}{16}$

म्हणुन दिवसाची संख्या वाढते ते सम प्रमाणात वाढते.

म्हणजेच $x \times 12 = \frac{36}{16} \times 12$

$= 27$ दिवस

SCERT TELANGANA

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

आपण म्हणु शकतो का प्रत्येक बदल हे प्रमाण आहे.

एका पुस्तकात 100 पाने आहेत. पुस्तकातील वाचलेल्या पाणाचे प्रमाण आणि शिल्लक पाणाचे प्रमाण कसे माहित कराल?

वाचलेल्या पानांची संख्या (x)	10	20	30	50	70
शिल्लक पाणाची संख्या (y)	90	80	70	50	30

येथे शिल्लक पाणाची संख्याचे काय झाले जेव्हा पुर्ण झालेल्या पाणांची संख्या वाढत आहे ? ते व्यस्त प्रमाणात बदलते का ? समजुन सांगा.

अभ्यास - 10.2

खालील तक्त्याचे निरिक्षण करा आणि माहित करा की कोणत्या चलराशी व्यस्त प्रमाण आहेत (येथे x आणि y)

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

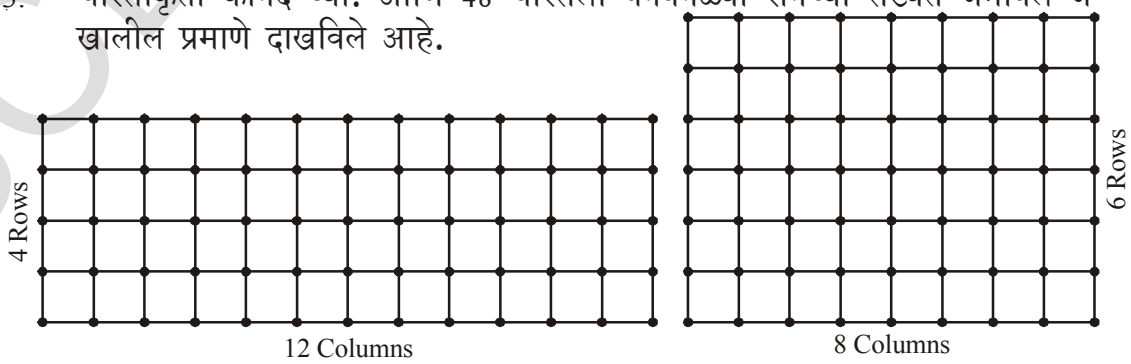
(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	25

2. एक शाळा 6000 रुपये पुस्तके विकत घेण्यासाठी खर्च करण्याचा विचार करीत आहे. या समाग्रीला वापरुण तक्ता पुर्ण करा.

प्रत्येक पुस्तकांची किंमत (रु.मध्ये)	40	50		75	
विकत घेणाऱ्या पुस्तकांची संख्या	150		100		75

3. चौरसाकृती कागद घ्या. आणि 48 चौरसला वेगवेगळ्या रांगेच्या संख्येत जमविले जे खालील प्रमाणे दाखविले आहे.



SCERT TELANGANA

रांगेची संख्या (R)	2	3	4	6	8
ओळीची संख्या (C)	---	---	12	8	---

तुम्हाला काय दिसुन येते ? जसे R वाढते तसे C कमी होते.

(i) $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ आहे का ?

(ii) $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ आहे का ?

(iii) R आणि C एकमेकास व्यस्त प्रमाणात आहेत का ?

(iv) या कृत्याला 36 चौरसांना वापरुन करा.

वर्ग प्रकल्प

तुमच्या वर्गात एका आठवड्यातील उपस्थितीत विद्यार्थ्यांची संख्या आणि अनउपस्थिती विद्यार्थ्यांची संख्या चा एक तक्ता तयार करा तुमच्या मित्रासोबत चर्चा करा आणि तुमची टिप्पणी तुमच्या वहीत लिहा.

आठवड्यातील दिवस	उपस्थित विद्यार्थी संख्या (x)	अनु उपस्थितीत विद्यार्थी संख्या (y)	$x.y$
सोमवार			
मंगळवार			
बुधवार			
गुरुवार			
शुक्रवार			
शनिवार			

आता चला, काही उदाहरणे सोडवु या.

उदाहरण 7: एका वस्तीगृहात 100 विद्यार्थ्यांसाठी 40 दिवसाचे राशन / सामान उपलब्ध आहे. जर 20 विद्यार्थी आणखी वस्तीगृहात 4 दिवसानंतर आधिक आले तर ते राशन / सामान किती दिवसापर्यंत जाईल ?

सोडवणुक: जसी विद्यार्थ्यांची संख्या वाढेल तर कमी दिवसापर्यंत राशन सारख्या प्रमाणात पुरेल. म्हणुन ते व्यस्त प्रमाणात आहे.

	दिवसाची संख्या	समान उपलब्ध असलेल्याविद्यार्थ्यांची संख्या
	40	100
4 दिवसानंतर	36 ↓	↑ 100
	x	120

आता, हा प्रश्न आहे की, जर 100 विद्यार्थ्यांसाठी 36 दिवसापर्यंचे तांदुळ उपलब्ध आहेत तर ते सामान 120 विद्यार्थ्यांसाठी किती दिवस चालतिल.

SCERT TELANGANA

$$\frac{36}{x} = \frac{120}{100}$$

$$x = \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \times 10\cancel{0}}{\cancel{12}\,\cancel{0}} = 30 \text{ days}$$

म्हणुन विद्यार्थ्यांची संख्या वाढत आहे.

$$100 \times x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{100}$$

म्हणुन दिवसाची संख्या सम प्रमणात घटत आहे.

म्हणजेच $36 \div x = 36 \div \frac{120}{100}$

$$\Rightarrow 36 \times \frac{120}{100} = 30 \text{ दिवस}$$

उदाहरण 8: एक कार एका गम्य स्थानाला पोहचण्यासाठी 60 की.मी. / तास च्या वेगाने 4 तास वेळ घेते. जर ती कार 80 कि.मी. / तास वेगाने प्रवास करील तर किती वेळ घेईल ?

सोडवणुक: जसा वेग वाढतो तसा लागलेला वेळ सम प्रमाणात कमी होते. म्हणुन घेतलेला वेळ वाहणाच्या वेगाच्या व्यस्त प्रमाणात समान अंतरासाठी आहे.

पध्दत 1

वेग	वेळ
60	4
80	x

(विंत्रा)

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$$

$$60 \times 4 = 80 \times x$$

$$x = \frac{60 \times 4}{80} = 3 \text{ hr.}$$

पध्दत II

$x \times$ वेग	वेळ $\div x$
60	4
80	y

$$60 \times x = 80$$

$$x = \frac{60}{80}$$

$$4 \div \frac{80}{60} = y$$

$$y = \frac{4 \times 60}{80} = 3 \text{ hr.}$$

उदाहरण 9: एका टाकीला भरण्यासाठी 6 पाईपांनी 1 तास 20 मीनीटे वेळ लागते. तशाच प्रकारचे जर 5 पाईप वापरले तर टाकीला भरण्यासाठी किती वेळ लागेल ?

सोडवणुक: टाकीला भरण्यासाठी गृहीत धरलेला वेळ समजा x म्हणुन आपणास खालील तक्ता आहे.

पाईपची संख्या	6	5
वेळ (मिनीटीत)	80	x

जर कमी पाईपाची संख्या, तर जास्त वेळ लागेल टाकीला भरण्यसाठी

SCERT TELANGANA

म्हणुन, हा व्यस्त प्रमाणाचा संदर्भ आहे.

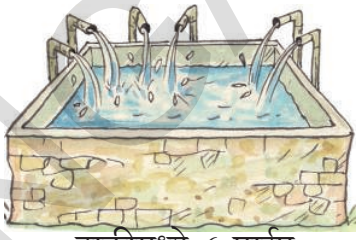
म्हणजेच $80 \times 6 = x \times 5$ $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$

किंवा $\frac{80 \times 6}{5} = x$

किंवा $x = 96$ मिनीट

अशा प्रकारे 5 पाईपाने 96 मिनीटात एक टाकी भरण्यासाठी घेतलेला वेळ किंवा 1 तास 36 मिनिट.

टाकीमध्ये 5 पाईप



टाकीमध्ये 6 पाईप

अभ्यास - 10.3

1. 8 रुपये प्रति किलो दराने 5 किलो आलु विकत घेण्यासाठी सिरिपाशी पुरेश पैसे आहेत. तेवढ्याच पैशात ती किती आलु विकत घेऊ शकतो जर दर 10 रुपये प्रति किलो वाढला आहे ?
2. एका शिबीरात 500 लोकांसाठी 70 दिवसापर्यंत अन्नाचा साठा आहे. जर 1200 अधिक लोक शिबिरात नोंद झाले तर तो साठा किती दिवसापर्यंत जाईल ?
3. 36 व्यक्ती एक काम 12 दिवसात करु शकतात. तर किती व्यक्ती तेच काम 9 दिवसात पुर्ण करु शकतील ?
4. एक सायकल चालक 28 कि.मी. अंतर 2 तासात पुर्ण करतो. त्यांचे वेगाने 56 कि.मी. अंतर पुर्ण करण्यासाठी लागलेला वेळ माहित करा.
5. एक जहाज एका निश्चित अंतराला 10 तासात 16 नॉटीकल मैल वेगाने पुर्ण करते तेवढेच अंतर पार करण्यासाठी त्याचा किती वेग वाढवावा लागतो. जर ते अंतर पुर्ण करण्यसाठी 8 तास वेळ घेते. ? (समुद्रातील अंतर मोजण्यासाठी नॉटीकल मैल चा वापर करतात.).
6. एका टाकीला भरण्यासाठी 5 पाईपांना $1\frac{1}{2}$ तास लागतात.तशाच प्रकारचे किती पाईप लागतात जर टाकी अर्धा तासात भरते.
7. जर 15 मजुदर एक भिंत 48 तासात बांधु शकतात. तेच काम 30 तासात करण्यासाठी किती मजदुर आवश्यक आहेत.?
8. एका शाळेत प्रत्येक दिवशी 8 तास आहेत प्रत्येक तास 45 मिनीटाचा आहे. किती मिनीटीचा एक तास होईल जर त्या शाळेत प्रत्येक दिवशी 6 तास आहेत. ? (शाळेतील तासाची संख्या समान आहे असे समजुन करा.)

SCERT TELANGANA

9. जेव्हा समप्रमाणात x आणि व्यस्त प्रमाणात y बदलते तेव्हा Z बदलेत म्हणुन x मध्ये 12% वाढ, आणि y मध्ये 20% घट झाल्यास Z मध्ये शेकडा वाढा माहित करा.

10. जर $x + 1$ माणस एक काम $x + 1$ करतात तर $(x + 2)$ माणस ने काम किती दिवसात करतील.

11. 24 मीटर परिमीती असलेला आयत दिला आहे. जर त्याची लांबी 1 मीटर ने वाढविली तर रुंदी आणि क्षेत्रफळ सुध्दा बदलते. खालील तक्त्याचा उपयोग करुन रुंदी आणि क्षेत्रफळ कसे बदलते ते लिहा.
तुम्हाला काय आढळुन आले ? तुमचे निरिक्षण विहित लिहा.

लांबी (सें.मी.मध्ये)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
रुंदी (सें.मी. मध्ये)	11	10	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
क्षेत्रफळ (सें.मी.^{2})	11	20	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

10.3 संयुक्त प्रमाण

काही वेळा एक राशी दुसऱ्या दोन किंवा जास्त राशीच्या काही बदलावर आधारीत असते. तेव्हा आपण पहिल्या राशीच्या गुणोत्तरा समान करतो

(i) एक राशी दुसऱ्या दोन राशी शी समप्रमाणात असु शकते.

(ii) एक राशी दुसऱ्या दोन राशी शी व्यस्त प्रमाणात असु शकते.

(iii) एक राशी दुसऱ्या दोन राशी शी समप्रमाणात असु शकते.आणि उरलेल्या राशी शी व्यस्त प्रमाणात असु शकते.

उदाहरण 10: समजा 35 विद्यार्थ्यांचा 24 दिवसाचा जेवनाचा खर्च 6300 रुपये आहे. तर 25 विद्यार्थ्यांचा 18 दिवसासाठी किती खर्च होईल.

सोडवणुक: इथे तीन राशी पहायला मिळतात. जसे, जेवणाचा खर्च विद्यार्थ्यांची संख्या आणि दिवसाची संख्या

जेवणाचा खर्च	विद्यार्थी संख्या	दिवसाची संख्या
6300	35	24
? (x)	25	18
6300 : x	35:25 = 7:5	24:18 = 4:3

जेवनाचा खर्च विद्यार्थ्यांच्या संख्याच्या समप्रमणात आहे.

जेवणाचा खर्च $\propto$ विद्यार्थी संख्या

$6300 : x = 7:5$

SCERT TELANGANA

पुन्हा जेवणाचा खर्च हा दिवसाच्या संख्येच्या समप्रमाणात आहे.

जेवणाचा खर्च $\propto$ दिवसाची संख्या

$6300 : x = 4 : 3$

जेवणाचा खर्च हा विद्यार्थ्यांची संख्या आणि दिवसाची संख्या यावर अवलंबुन असतो. म्हणुन आपण त्या दोन राशीचे संयुक्त गुणोत्तर घेऊ.

जेवनाचा खर्च $\propto$ विद्यार्थ्यांची संख्या चे गुणोत्तर आणि दिवसांची संख्याचे गुणोत्तर यांचे संयुक्त गुणोत्तर होय.

$6300 : x = 7 : 5$ आणि $4 : 3$ चे संयुक्त गुणोत्तर

$6300 : x = 7 \times 4 : 5 \times 3$

$6300 : x = 28 : 15$

मध्य पदाचा गुणाकार = अंत्य पदाचा गुणाकार

$28 \times x = 15 \times 6300$

$$x = \frac{15 \times 6300}{28}$$

$x = 3375$ रुपये

म्हणुन जेवचाना खर्च 3375 रुपये होईल.

उदाहरण 11: 24 कामगार दररोज 6 तास कामकरुन एक काम 14 दिवसात पुर्ण करतात. जर प्रत्येक कामगार दररोज 7 तास काम केल्यास 8 दिवसात तेच काम पुर्ण करायला किती कामगार लगतील.

सोडवणुक: इथे कामगाराची संख्या प्रत्येक दिवशी तासाची संख्या व तांसाची संख्या अशा तीन राशी आहेत.

कामगारांची संख्या	दिवसातील कामाचे तास	दिवसाची संख्या
24	6	14
? (x)	7	8
$24 : x$	$6 : 7$	$14 : 8 = 7 : 4$

कामगाराची संख्या

$$\text{कामागाराची संख्या} \propto \frac{1}{\text{number of hours per day}}$$

SCERT TELANGANA

$24 : x = 6 : 7$ चे व्यस्त प्रमाण म्हणजेच $7 : 6$

$\Rightarrow 24 : x$ हे $7 : 6$ च्या समप्रमाणात आहे.

पुन्हा एकुण दिवसाची संख्या ही एकुण कामगाराच्या व्यस्त प्रमाणात आहे.

$$\text{कामगाराची संख्या} \propto \frac{1}{\text{दिवसाची संख्या}}$$

$24 : x = 7 : 4$ चे व्यस्त प्रमाण म्हणजेच $4 : 7$

कामगाराची संख्याही दोन चलावर आधारीत असते. ते म्हणजे दिवसांची संख्या आणि प्रत्येक तासाची संख्या म्हणुन

कामागाराची संख्या $\propto$ एकुण दिवसाचे व्यस्त प्रमाण आणि दर दिवसाच्या तासांच्या संख्येच्या व्यस्त गुणोत्तराचे संयुक्त गुणोत्तर

$24 : x = 7 : 6$ आणि $4 : 7$ चे संयुक्त गुणोत्तर

$24 : x = 7 \times 4 : 6 \times 7$

$24 : x = 4 : 6$

$24 : x = 2 : 3$

मध्य पदाचा गुणाकार = अंत्यपदाचा गुणाकार

$2 \times x = 24 \times 3$

$x = 36$

म्हणुन आवश्यक कामगाराची संख्या $= 36$.

दुसरी पध्दत

$$\frac{24}{x} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2 \times x = 24 \times 3$$

$$x = \frac{72}{2} = 36$$

उदाहरण 12: 180 मीटर लांब भिंत, 12 पेंटर्स 3 दिवसात रंगवितात. तर 200 मीटर लांब भिंत 5 दिवसात रंगवायला किती पेंटर्स लागतात ?

सोडवणुक: इथे पेटर्स ची संख्या आणि भिंतिची लांबी सम प्रमाणात आहे.आणि दिवसाची संख्याच्या व्यस्त प्रमाणात आहे.

पेटर्सची संख्या	भिंतीची लांबी	दिवसाची संख्या
12	180	3
x	200	5
$12 : x$	$180 : 200 = 9 : 10$	$3 : 5$

पेंटर्स ची संख्या α भिंतीची लांबी

$12 : x = 9 : 10$ ---- (1) आणि

$$\text{पेंटर्स ची संख्या} \ \alpha \ \frac{1}{\text{number of days}}$$

SCERT TELANGANA

$12 : x = 3 : 5$ चे व्यस्त प्रमाण

$12 : x = 5 : 3$ ---- (2)

वरील (1) आणि (2) समीकरणानुसार

$12 : x = 9 : 10$ आणि $5 : 3$ चे संयुक्त प्रमाण

$= (9 : 10) \times (5 : 3)$

$= 9 \times 5 : 10 \times 3$

$= 45 : 30 = 3 : 2$

$12 : x = 3 : 2$ (मध्यपदाचा गुणाकार = अंत्यपदाचा गुणाकार)

$3 \times x = 12 \times 2$

$x = \frac{24}{3} = 8$

एकुण आवश्यक पेंटर्सची संख्या = 8

पध्दत

$\frac{12}{x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3}$

$\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$

$12 \times 2 = 3 \times x$

$x = \frac{\cancel{12}^{4} \times 2}{\cancel{3}} = 8$

अभ्यास - 10.4

1. 8 जणांला 20 दिवसासाठी 480 रुपये चे तांदुळ आवश्यक आहे. तर 12 जणाला 12 दिवसासाठी किती तांदुळची आवश्यकता आहे ?
2. 10 व्यक्ती 75 कि.मी. लांब रस्ता 5 दिवसात तयार करतात. तर 15 व्यक्ती 45 कि.मी. लांब रस्ता किती दिवसात तयार करतात.?
3. एक काम 24 व्यक्ती दररोज 8 तास काम करुन 15 दिवसात पुर्ण करतात तर 20 व्यक्ती दररोज 9 तास काम करुन किती दिवसात पुर्ण करतात. ?
4. 175 व्यक्ती 3150 मीटर लांब कालवा 36 दिवसात खोदकाम करतात. तर किती व्यक्ती 3900 मीटर लांब कालवा 24 दिवसात खोदकाम करतात?
5. जर 14 टायपिस्ट दररोज 6 तास काम करुन 12 दिवसात एक पुस्तकाचे टाईपिंग करतात तर 4 टायपिस्ट ला दररोज 7 तास काम करुन तेच पुस्तक किती दिवसात टाईपिंग करतात ?

आपण काय चर्चा केली ?

- जर x आणि y हे समप्रमाण असतील तर दोन्ही राशी सम गुणोत्तरात फरक दर्शविते म्हणजेच जर $\frac{x}{y} = k$ किंवा $x = ky$. असे लिहु शकतो. जर

SCERT TELANGANA

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ किंवा $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$ [y_1, y_2 या किंमती y च्या समान आहेत x_1, x_2 च्या x समान

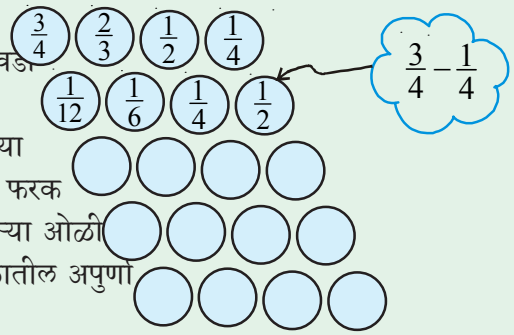
- अशा प्रकारे x आणि y या राशी व्यस्त प्रमाणात फरक दाखवितात. जर $xy = k$ अशा प्रकाराच्या संबंध त्यामध्ये असेल तर त्यात k स्थिरांक आहे.जर y_1, y_2 हया y च्या किंमती आहेत तसेच x_1 आणि x_2 चा x चा किंमती आहेत तेव्हा $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k), किंवा $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.
- जेव्हा एका राशित वाढ होते (कमी होणे) तेव्हा त्याच प्रमाणात दुसरी राशी कमी होते.(वाढ होणे) तेव्हा आपण असे म्हणता येईल की एक राशी दुसऱ्याशीच्या व्यस्त गुणोत्तरा फरक दाखविते. पहिल्या राशिचे गुणोत्तर $(x_1 : x_2)$ हे दुसऱ्या राशीच्या व्यस्त गुणोत्तराला$(y_1 : y_2)$ समान असते.दोन्ही गुणोत्तर सारखे असल्यामुळे या व्यस्त गुणोत्तरातरास प्रमाणात व्यस्त करु शकतो याला व्यस्त प्रमाण म्हणतात.
- कधी कधी एका राशीतील प्रमाणाचा बदल दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त प्रमाणाच्या राशीच्या गुणत्तराशी सारखे यावर निर्भर राहु शकते. तेव्हा आपण प्रथम राशीचे प्रमाण हे संयुक्त प्रमाणाशी बरोबर करतो.

Diffy with fractions

या कृत्यामध्ये असलेल्या पध्दतीसDiffy असे म्हणतात. हे नाव क्रमवार असलेल्या संख्येच्या फरकास पध्दतीला घेऊन आले आहे. आणि हे कृत्य वजाबाकी नैपुण्य सरावासाठी घेतले जाते.

मार्गदर्शन

पायरी 1: चित्रामध्ये दाखविलेल्या प्रमाणे वर्तुळाची रचना करा आणि वरील चार वर्तुळात चार अपुर्णांक निवडा.



पायरी2 : दुसऱ्या ओळीतील पहिल्या तिन वर्तुळा वरील अपुर्णांकाचा फरक लिहा. आणि उजव्या आणि डाव्या बाजुला प्रश्नामध्ये नेहमी वरील त्या अपुर्णांकातील फरक काळजी पुर्वक मोठ्या अपुर्णांकातुन वजा करा. दुसऱ्या ओळीतील चवथ्या वर्तुळात पहिल्या आणि चवथ्या वर्तुळातील अपुर्णांकातुन लहान अपुर्णांक वजा केले जाते.

पायरी 3: वर्तुळाच्या क्रमवार ओळींना भरण्यासाठी पायरी - 1 वारंवार घ्या जर तुम्हाला शुन्य आले तर तुम्ही थांबा.

पायरी 4: पुन्हा पुन्हा 1,2 आणि 3 बर चौथ्यावेळी आणि प्रत्येकी वेगळ्या अपुर्णांकासोबत सुरु करा.प्रयत्न करा. की अपुर्णांक $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$ पहिल्या रांगेतील अपुर्णांक आहे.

SCERT TELANGANA

धडा 11

बैजीक पदावली

11.0 प्रस्तावणा

पदावली विचारात घ्या.

(i) $3 + 8 - 9$ (ii) $\frac{1}{3}xy$ (iii) 0 (iv) $3x + 5$ (v) $4xy + 7$ (vi) $15 + 0 - 19$ (vi) $\frac{3x}{y} (y \neq 0)$

(i), (iii) आणि (vi) ही सांख्यिक पदावली आहेत (ii), (iv), (v) आणि (vii) ही बैजीक पदावली आहेत. तुम्ही त्यामधील फरकास ओळखाल का.? तुम्ही अजुन काही पदावल्या बनवु शकता का ? तुम्हाला माहित आहे की, पदावली चलांनी आणि स्थिरांकानी बनलेल्या असतात. $3x + 5$, या पदावलीत x हा चल आणि 3, 5 स्थिरांक आहेत. $3x$ हे बैजीक पद आहे. आणि 5 ही संख्या आहे. $4xy + 7$ ही पदावली x आणि y आणि चलांनी आणि 4 आणि 7 स्थिरांकांनी तयार झाली आहे.

आता $\frac{1}{3}xy$ मध्ये एक पद आणि $2xy + pq - 3$ मध्ये 3 पदे आहेत.

म्हणुन पदे ही चलांनी आणि स्थिरांकानी बनतात हे तुम्हास माहित होते.

पदांची बेरीज आणि वजाबाकी केली असता पदावली बनते.

आपणास माहित आहे की, $3x + 5$ या पदावलीची किंमत एक संख्या होऊ शकते. जर $x = 2$ असल्यास पदावलीची किंमत $3(2) + 5 = 6 + 5 = 11$ होते. x च्या वेगवेगळ्या किंमती वरुन $3x + 5$ पदावलीची वेगवेगळी किंमत येते.

हे करा

1. खालील बैजीक पदावलीतील पदांची संख्या काढा.
   $5xy^2$, $5xy^3 - 9x$, $3xy + 4y - 8$, $9x^2 + 2x + pq + q$.
2. x च्या वेगवेळ्या किंमती घेऊन $3x + 5$ च्या किंमती काढा

चला अजुन काही बैजीक पदावल्या घेऊ या $5xy^2$, $5xy^3 - 9x$, $3xy + 4y - 8$ इत्यादी हे स्पष्ट झाले की, $5xy^2$ ही एकपदी आहे. $5xy^3 - 9x$ ही व्दीपदी आहे .आणि $3xy + 4y - 8$ त्रिपदी आहे.

एकपदामधील चलांच्या घातांकाच्या बेरीजेला त्या एक पदाची कोटी म्हणतात.

तुम्हाला माहित आहे की, $5x^2y$ एकपदाची कोटी 3आहे.
$5xy^3 - 9x$ या व्दिपदाची कोटी 4 आहे.
अशा प्रकारे $3xy + 4y - 8$ ची कोटी 2 आहे.

बैजीक राशीतील विविध पदांच्या महत्तम कोटीस त्या बैजीक पदावलीला कोटी म्हणतात

SCERT TELANGANA

पदावलीत फक्त एक, दोन आणि तिन पदे असल्यास त्यास एकपदी व्दिपदी आणि त्रिपदी म्हणतात. सामान्यता कोणत्याही पदवतील सहगुणक शुन्य नसलेले एक किंवा त्या पेक्षा जास्त पदे असल्यास त्यास बहुपदी असे म्हणतात.

11.1 सजातीय पदे आणि विजातीय पदे

खालील पदांचे निरिक्षण करा.

$2x,\ 3x^2,\ 4x,\ -5x,\ 7x^3$

या मधील $2x$, $4x$ आणि $-5x$ मध्ये चल आणि घातांक सारखे आहेत. याला सजातीय पदे म्हणतात सजातीय पदात सारखा सांख्यिक सहगुणक नसतो. $8p$ आणि $8q$ सजातीय का नाहीत? $8p$ आणि $8pq$ सजातीय का नाहीत? $8p$आणि $8p^2$ सजातीय का नाहीत ?

हे करा

1. खालील सजातीय पदे काढा.

   $ax^2y,\ 2x,\ 5y^2,\ -9x^2,\ -6x,\ 7xy,\ 18y^2.$

2. $5pq^2$ साठी 3 सजातीय पदे लिहा.

11.2 बैजीक पदावलीची बेरीज आणि वजाबाकी

उदाहरण:1 $5x^2 + 3xy + 2y^2$ आणि $2y^2 - xy + 4x^2$ ची बेरीज करा.

सोडवणुक : खालील पदावलीना एका खाली एक अशा प्रकारे लिहा की, सजातीय पदे एकाखाली एक आली पाहिजे.

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^2 & +\ 3xy & +\ 2y^2 \\ \hline + & 4x^2 & -\ xy & +\ 2y^2 \\ \hline & 9x^2 & +\ 2xy & +\ 4y^2 \end{array}$$

विचार करा - चर्चा करा आणि लिहा.

1. शिला म्हणाली की, $2pq$ आणि $4pq$ ची बेरीज $8p^2q^2$ आहे. ती बरोबर आहे का ? तुमचे स्पष्टीकरण द्या.
2. रहमान ने $4x$ आणि $7y$ ची बेरीज केली असता त्यास $11xy$. उत्तर आले. तुम्ही रहमानशी सहमत आहे का ?

उदाहरण:2 $2xy + 9x^2$ ला $12xy + 4x^2 - 3y^2$ तुन वजाबाकी करा.

सोडवणुक: दिलेल्या पदांना खालील प्रमाण लिहा. ज्या पदावलीला वजा करायची आहे ती खाली लिहा आणि ज्यामधुन वजा करायचे आहे ती सर्वांत वर लिहा. सजातीय पदे एका खालील एक आली पाहिजे

$$\begin{array}{rrr} & 12xy & +\ 4x^2 - 3y^2 \\ & 2xy & +\ 9x^2 \\ (-) & & (-) \\ \hline & 10xy & -\ 5x^2 - 3y^2 \\ \hline \end{array}$$

खालच्या पदावलीचे चिन्ह बदलल्या नंतर बेरीज करा.

SCERT TELANGANA

[सुचना : संख्याची वजाबाकी ही बेरजेचा व्यस्ताच्या बेरजे सारखी आहे. अशाप्रकारे -3 ची वजाबाकी म्हणजे $+3$बेरीज होय. अशा रितीने $9x^2$ ची वजाबाकी म्हणजेच $-9x^2$ची बेरीज, $-3xy$ ची वजाबाकी म्हणजे $+3xy$ ची बेरीज सारखीच असते.]

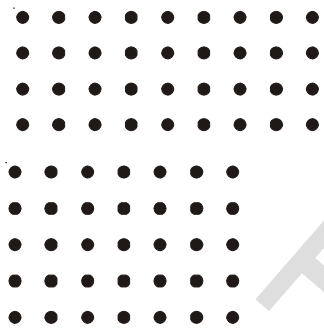
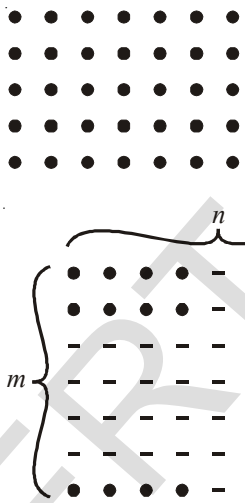
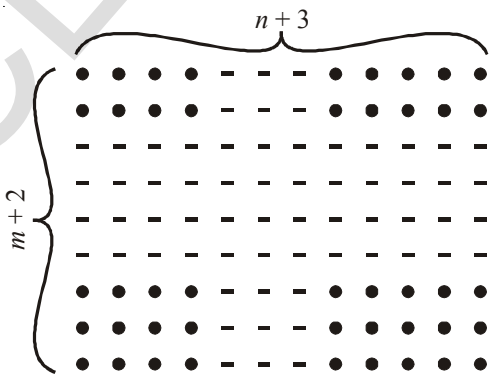
हे करा

1. जर $A = 2y^2 + 3x - x^2$, $B = 3x^2 - y^2$ आणि $C = 5x^2 - 3xy$ तर माहित करा.

(i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $B + C$ (iv) $B - C$ (v) $A + B + C$ (vi) $A + B - C$

11.3 बैजीक पदावलीचा गुणाकार

प्रस्तावना (i) खालील टिबांच्या नमुन्या कडे पहा

टिंबाचा नमुना	एकुण टिंबांची संख्या आडवी × उभी
	4×9
	5×7
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

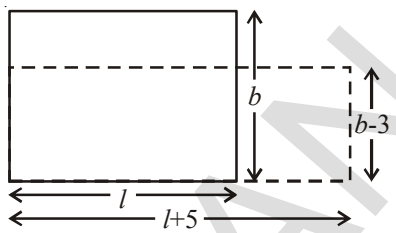
एकुण टिंब माहित करण्यासाठी आडव्या रांगेतील टिंबाच्या संख्येला उभ्या रांगेतील टिंबांच्या संख्येने गुणाकार करावा लागतो.

येथे आडव्या रांगेची संख्या 2ने वाढविल्यास म्हणजे $m+2$ आणि उभ्या रांगेची संख्या 3ने वाढविणे म्हणजेच $n+3$

SCERT TELANGANA

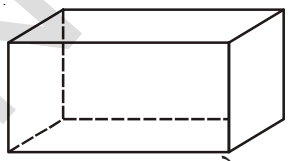
(ii) आता तुम्ही एका दुसऱ्या परिस्थितीचा विचार करु शकाल का ? ज्या मध्ये दोन बैजीक पदावलीचा गुणाकारा केला आहे ?

आपण आयताचे क्षेत्रफळाचा विचार करु शकतो. आयताचे क्षेत्रफळ $l \times b$, आहे येथे l लांबी आहे. आणि b रुंदी आहे. जर आयतांची लांबी 5 ने वाढली आहे म्हणजे $(l + 5)$ आणि रुंदी 3 ने कमी केल्यास म्हणजेच $(b - 3)$ नविन आयताचे क्षेत्रफळ $(l + 5) \times (b - 3)$ चौरस एकक होते.



आयताचे क्षेत्रफळ माहित करण्यासाठी आपणास बैजीक पदावलीचा गुणाकार केला. पाहिजे जसा $l \times b$ आणि $(l+5) \times (b-3)$ वाढविला पाहिजे.

(iii) घनाभाच्या घनफळचा विचार तुम्ही बैजेकि पदावलीच्या रुपात करु शकता का ? (आयताकृती पेटीचे घनफळ ही लांबी रुंदी आणि उंचीचा गुणाकार होय.).



(iv) आपण जेव्हा आपण वस्तु विकत घेतो तेव्हा आपणास गुणाकार करावा लागतो.
एक डझन केळीची किंमत p रुपये आहे.
आणि जर शाळेच्या पिकणिक साठी z डझन केळीची आवश्यकता आहे.
तर आपल्याला = $p \times z$ रुपये दयावे लागेल.
समजा प्रति डझन ची किंमत 2 ने कमी झाली आणि आवश्यक असलेल्या केळीतुन 4 डझन कमी केले तर
केळीच्या प्रति डझनची किंमत = $(p - 2)$ रुपये
आणि आवश्यक केळी = $(z - 4)$ डझन
म्हणुन आपणास = $(p - 2) \times (z - 4)$ रुपये दयावे लागते.

प्रयत्न करा.

वेग आणि वेळ, मुद्दल आणि व्याजाच्या दरावरुन व्याज बाधंणे यास बैजीक पदावलीच्या रुपात लिहा.

अशा प्रकारच्या अजुन दोन संदर्भाचा तुम्ही विचार करा. येथे आपण बैजीक पदावलीत व्यक्त करतो ?

वरील सर्व उदाहरणात, आपणास दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त राशीच्या गुणाकारा केला पाहिजे. जर राशी बैजिक पदावलीतर दिल्या असता. त्यांचा गुणाकार माहित करणे, जरुरी आहे. याचा अर्थ हा गुणाकार कसा आलेला आहे. हे आपणास माहित पाहिजे. यास प्रमाणबध्दतेने करा. सुरु करण्यापुर्वी आपणास दोन एकपदीच्या गुणाकाराकडे पाहिले पाहिजे.

SCERT TELANGANA

11.4 एकपदीचा एकपदीशी गुणाकार

11.4.1 दोन एकपदीचा गुणाकार

आपणास माहित आहे की,

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$

आणि $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

आता, खालील गुणाकाराचे निरिक्षण करा.

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

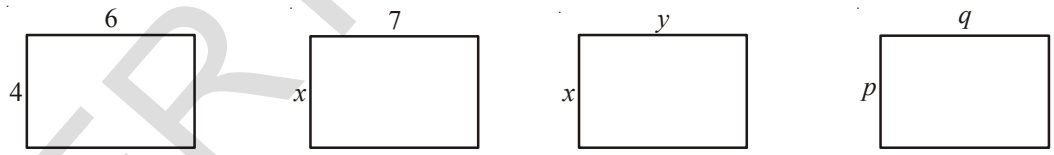
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

बैजिक पदांच्या गुणाकार माहित करण्यासाठी सारख्या पाया असलेल्या चलांच्या घातांकास मिळवुन, घातांकाचे नियम वापरलेले पाहिजे.

खालील निरिक्षण करा आणि रिकाम्या जागा भरा.



क्षेत्रफळ = $4 \times 6 = 24$एकक क्षेत्रफळ $x \times 7$ = ...क्षेत्रफळ = $x \times y$ =.....क्षेत्रफळ = ... ×..... = ...

खालील गुणाकार पहा :-

1. $7x \times 5y = (7 \times 5) \times (x \times y) = 35xy$
2. $3x \times (-2y) = \{3 \times (-2)\} \times (x \times y) = -6xy$
3. $(-4x) \times (-6y) = (-4) \times (-6) \times (x \times y) = 24xy$
4. $3x \times 5x^2 = (3 \times 5) \times (x \times x^2) = 15x^3$
5. $(-2x^2) \times (-4x^2) = (-2) \times (-4) \times x^2 \times x^2 = 8x^4$

SCERT TELANGANA

सुचना (i) दोन घन पुर्णांकाचा गुणाकार घन पुर्णांक आहे.
(ii) दाने ऋण पुर्णांकाचा गुणाकार घन पुर्णांक आहे.
(iii) घन आणि ऋण पुर्णांकाचा गुणाकार ऋण पुर्णांक आहे.

हे करा.

1. तक्ता पुर्ण करा.

पहिली एकपदी	दुसरी एकपदी	दोन एकपदीचा गुणाकार
$2x$	$-3y$	$2x \times (-3y) = -6xy$
$-4y^2$	$-2y$	.....
$3abc$	$5bcd$	.....
mn	$-4m$	.....
$-3mq$	$-3nq$	.....

2. जेव्हा तुम्ही दोन एकपदीचा गुणाकार करता तुम्हाला नेहमी एकच एकपदी येथे ही तपासणी करा.

11.4.2 तीन किंवा त्यापेक्षा एकपदीचा गुणाकार

खालील उदाहरणे पहा :-

उदाहरण 3: $5x$, $6y$ आणि $7z$ चा गुणाकार माहित करा.

सोडवणुक:

पध्दत I

$5x \times 6y \times 7z = (5x \times 6y) \times 7z$

$= 30xy \times 7z$

$= 210xyz$

पध्दत II

$5x \times 6y \times 7z = 5 \times x \times 6 \times y \times 7 \times z$

$= 5 \times 6 \times 7 \times x \times y \times z$

$= 210\, xyz$

(सहगुणकाचा पहिले आणि चलांचा नंतर गुणाकार करा.)

उदाहरण 4: $3x^2y \times 4xy^2 \times 7x^3y^3$ माहित करा.

सोडवणुक: $= 3 \times 4 \times 7 \times (x^2y) \times (xy^2) \times (x^3y^3)$

$= 84 \times x^2 \times y \times x \times y^2 \times x^3 \times y^3$

$= 84 \times (x^2 \times x \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$

$= 84 \times x^6 \times y^6 = 84x^6y^6.$

उदाहरण 5: $3x$, $-4xy$, $2x^2$, $3y^2$, $5xy^2$ चा गुणाकार माहित करा.

सोडवुणक : $3x \times (-4xy) \times 2x^2 \times 3y^2 \times 5x^3y^2$

$= [3 \times (-4) \times 2 \times 3 \times 5] \times (x \times x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^2)$

$= -360x^7y^5.$

दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त एक पदीचा गुणाकार केल्यास एक पदीच येते. हे पाहिले पाहिजे.

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 11.1

1. खालील जोडीचा गुणाकार करा:

(i) $6, 7k$ (ii) $-3l, -2m$ (iii) $-5t^2 - 3t^2$ (iv) $6n, 3m$ (v) $-5p^2, -2p$

2. खालील गुणाकाराचा तक्ता पुर्ण करा.

X	$5x$	$-2y^2$	$3x^2$	$6xy$	$3y^2$	$-3xy^2$	$4xy^2$	x^2y^2
$3x$	$15x^2$	....	....	....	....	....	....	....
$4y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$-2x^2$	$-10x^3$	$4x^2y^2$	....	....	....	....	....	....
$6xy$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$3x^2y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2xy^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$5x^2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....

3. लांबी, रुंदी आणि उंची वरुन खालील आयताकृती डब्यांची घनफळ काढा

अ.क्र.	लांबी	रुंदी	उंची	घनफळ $(v) = l \times b \times h$
1.	$3x$	$4x^2$	5	$v = 3x \times 4x^2 \times 5 = 60x^3$
2.	$3a^2$	4	$5c$	$v =$ .....
3.	$3m$	$4n$	$2m^2$	$v =$ .....
4.	$6kl$	$3l^2$	$2k^2$	$v =$ .....
5.	$3pr$	$2qr$	$4pq$	$v =$ .....

4. खालील एकपदीचा गुणाकार माहित करा.

(i) xy, x^2y, xy, x (ii) a, b, ab, a^3b, ab^3 (iii) kl, lm, km, klm

(iv) pq, pqr, r (v) $-3a, 4ab, -6c, d$

5. जर $A = xy$, $B = yz$ आणि $C = zx$, जर ABC = ...काढा

6. जर $P = 4x^2$, $T = 5x$ आणि $R = 5y$, तर $\frac{PTR}{100} =$ ..... काढा

7. तुम्ही स्वत:काही एकपदी घेऊन त्याच्या गुणाकार माहित करा.

SCERT TELANGANA

11.5 व्दिपदी आणि तिपदीला एकपदीने गुणाकर करणे

11.5.1व्दिपदीला एकपदीने गुणने

एकपदी $5x$ आणि $6y+3$ ला गुणा

या गुणाकारात वापरलेली पध्दत आहे.

पायरी	सुचना	पध्दत
1.	गुणाकाराचे चिन्ह वापरुन एकपदी आणि व्दिपदी चा गुणाकार लिहा	$5x \times (6y+3)$
2.	वितरणाचा नियम वापरा. व्दिपदीच्या पहिल्या पदाने एकपदीला गुणाकार करुन नंतर व्दिपदीच्या दुसऱ्या पदाने एकपदीला गुणाकार करा आणि गुणाकार मिळवा	$(5x \times 6y) + (5x \times 3)$
3.	पदांना संक्षिप्त करा.	$30xy + 15x$

म्हणुन $5x$ आणि $6y+3$ चा गुणाकार

$$5x(6y + 3) = 5x \times (6y + 3)$$
$$= (5x \times 6y) + (5x \times 3)$$
$$= 30xy + 15x$$

उदाहरण 6: $(-4xy)(2x - y)$ चा गुणाकार काढा.

सोडवणुक: $(-4xy)(2x - y) = (-4xy) \times (2x - y)$

$$= (-4xy) \times 2x + (-4xy) \times (-y)$$
$$= -8x^2y + 4xy^2$$

उदाहरण7: $(3m - 2n^2)(-7mn)$ चा गुणाकार काढा

सोडवणुक: $(3m - 2n^2)(-7mn) = (3m - 2n^2) \times (-7mn)$

$\because$ संवृत्ततेचा गुणधर्म

$$= (-7mn) \times (3m - 2n^2)$$
$$= ((-7mn) \times 3m) - ((-7mn) \times 2n^2)$$
$$= -21m^2 n + 14mn^3$$

हे करा

1. गुणाकार माहित करा.: (i) $3x(4ax + 8by)$ (ii) $4a^2b(a-3b)$ (iii) $(p + 3q^2)pq$ (iv) $(m^3 + n^3)5mn^2$
2. एकपदी आणि व्दिपदीमधील गुणाकाराची एकुण पदे काढा. ?

SCERT TELANGANA

11.5.2 त्रिपदीला एकपदीने गुणाकार करणे

एकपदी $2x$ आणि त्रिपदी $(3x + 4y - 6)$ घ्या

त्यांच्या गुणाकार $= 2x \times (3x + 4y - 6)$

$= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) + (2x \times (-6))$ (वितरणाचा गुणधर्मानुसार)

$= 6x^2 + 8xy - 12x$

> व्दिपदी आणि त्रिपदीचा गुणाकारात जास्तीत जास्त एकुण पदांची

अभ्यास - 11.2

1. खालील तक्ता पुर्ण करा.

अ.क्र.	पहिली पदावली	दुसरी पदावली	गुणाकार
1	$5q$	$p+q-2r$	$5q(p+q-2r)=5pq+5q^2-10qr$
2	$kl+lm+mn$	$3k$	……
3	ab^2	$a+b^2+c^3$	……
4	$x-2y+3z$	xyz	……
5	$a^2bc+b^2cd-abd^2$	$a^2b^2c^2$	……

2. संक्षिप्त करा : $4y(3y+4)$
3. $x(2x^2-7x+3)$ चा संक्षिप्त करा आणि (i) $x = 1$ आणि (ii) $x = 0$ साठी त्याच्या किंमती काढा.
4. $a(a-b), b(b-c), c(c-a)$ गुणाकारास मिळवा
5. $x(x+y-r), y(x-y+r), z(x-y-z)$ गुणाकारास मिळवा
6. $3x(x+2y)$ च्या गुणाकारातुन $2x(5x-y)$ चा गुणाकार वजा करा.
7. $6k(2k+3l-2m)$ मधुन $3k(5k-l+3m)$ वजा करा.
8. संक्षिप्त करा: $a^2(a-b+c)+b^2(a+b-c)-c^2(a-b-c)$

11.6 व्दिपदीला व्दिपदीने किंवा त्रिपदीने गुणाकार करा.

11.6.1 व्दिपदाला व्दिपदीने गुणणे:

दोन व्दिपदी $5x+6y$ आणि $3x - 2y$ घ्या.

आता, दोन व्दिपदीचा $5x+6y$ आणि $3x - 2y$ गुणाकार

SCERT TELANGANA

गुणाकराची पध्दत खाली आहे.

पायरी	सुचना	पध्दत
1.	दोन व्दिपदीचा गुणाकार लिहा	$(\underline{5x}+\underline{6y})(3x-2y)$
2.	वितरणाचा नियम वापरा पहिल्या व्दिपदीतील पहिल्या पदास दुसऱ्या व्दिपदीने गुणा पहिल्या व्दिपदीतील दुसऱ्या पदाला दुसऱ्या व्दिपदीने गुणा आणि आलेला गुणाकार मिळवा	$\underline{5x}(3x-2y)+\underline{6y}(3x-2y)$ $= (5x\times3x)-(5x\times2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$
3.	संक्षिप्त करा	$(5x\times3x)-(5x\times2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$ $=15x^2 - 10xy +18xy - 12y^2$
4.	सजातीय पदे मिळवा	$15\ x^2+8xy-12y^2$

म्हणुन $5x+6y$ आणि $3x-2y$ चा गुणाकार

$= (5x + 6y)(3x - 2y)$

$= 5x(3x - 2y) + 6y(3x - 2y)$ (वितरणाचा नियमानुसार)

$= (5x \times 3x) - (5x \times 2y) + (6y\times3x)-(6y\times2y)$

$=15x^2 - 10xy + 18xy - 12y^2$

$= 15\ x^2+8xy - 12y^2$

हे करा

1. गुणाकार करा

   (i) $(a - b)(2a + 4b)$ (ii) $(3x + 2y)(3y - 4x)$

   (iii) $(2m - l)(2l - m)$ (iv) $(k + 3m)(3m - k)$

2. दोन व्दिपदीच्या गुणाकारास एकुण किती पदे असतात ?

11.6.2 व्दिपदीला त्रिपदीने गुणने

व्दिपदी $2x + 3y$ आणि त्रिपदी $3x + 4y - 5z$. घ्या.

आता, $2x + 3y$ ला $3x + 4y - 5z$ ने गुणा.

SCERT TELANGANA

गुणाकाराची पध्दत

पायरी	सुचना	पध्दत
1.	गुणाकाराच्या चिन्हाचा उपयोग करुन व्दिपदीचा आणि त्रिपदीचा गुणाकरा लिहा.	$(2x+3y)(3x+4y-5z)$
2.	वितरणाचा नियम वापरा व्दिपदीच्या पहिल्या पदास त्रिपदीने गुणा आणि व्दिपदीच्या दुसऱ्या पदास त्रिपदीने गुणा आणि आलेल्या गुणाकारास मिळवा	$2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$
3.	संक्षिप्त करा	$(2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$ $6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$
4.	सजातीय पदे मिळवा - बेरीज करा.	$6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

म्हणुन $(2x+3y)$ आणि $(3x+4y-5z)$ चा गुणाकार करा.

$= (2x+3y)(3x+4y-5z)$

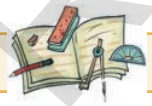
$= 2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$ (वितरणाच्या गुणधर्मानुसार)

$= (2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$

$=6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$

$= 6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

व्दिपदीच्या आणि त्रिपदीच्या गुणाकरात जास्तीत जास्त एकुण किती पदे येतात.



अभ्यास - 11.3

1. व्दिपदीचा गुणाकार करा.

   (i) $2a-9$ आणि $3a+4$ (ii) $x-2y$ आणि $2x-y$

   (iii) $kl+lm$ आणि $k-l$ (iv) m^2-n^2 आणि $m+n$

2. गुणाकार काढा:

   (i) $(x+y)(2x-5y+3xy)$ (iii) $(a-2b+3c)(ab^2-a^2b)$

   (ii) $(mn-kl+km)(kl-lm)$ (iv) $(p^3+q^3)(p-5q+6r)$

3. सरळ रुप द्या.:

   (i) $(x-2y)(y-3x)+(x+y)(x-3y)-(y-3x)(4x-5y)$

SCERT TELANGANA

(ii) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$

(iii) $(a-2b+5c)(a-b)-(a-b-c)(2a+3c)+(6a+b)(2c-3a-5b)$

(iv) $(pq-qr+pr)(pq+qr)-(pr+pq)(p+q-r)$

11.7 समानता म्हणजे काय ?

समीकरण $a(a-2)=a^2-2a$ घ्या

a च्या कोणत्याही किंमती घेऊन आणि समीकरण्याच्या दोन्ही बाजुची किंमत ठरवा.

$a=5$ साठी डावी बाजु $= 5(5-2) = 5\times3 = 15$

उजवी बाजु $= 5^2-2(5) = 25 - 10 = 15$

समीकरणात डावी बाजु = उजवी बाजु $a=5$ साठी

अशा रितीने $a = -2$ साठी

डावी बाजु $= (-2)(-2-2) = (-2)\times(-4) = 8$

उजवी बाजु $= (-2)^2-2(-2) = 4+4 = 8$

अशा प्रकारे समीकरणात डावी बाजु = उजवी बाजु $a=-2$ साठी सुध्दा येते.

a च्या केणत्याही किंमतीसाठी समीकरण सत्य आहे, हे आपण म्हणु शकतो. म्हणुन समीकरणास समानता म्हणतात.

समीकरण $a(a+1) = 6$ घ्या

हे समीकरण फक्त $a = 2$ आणि -3 साठी सत्य आहे. परंतु ते इतर किंमतीसाठी सत्य नाही म्हणुन हे $a(a + 1) = 6$ समीकरण समानता होत नाही.

समीकरण समानता होते जर कोणतीही किंमत त्याचा चलराशीच्या (s) ठिकाणी ठेवल्यास समीकरणाचे समाधान होते.

समीकरण चलाच्या एका विशिष्ट किंमती साठी सत्य आहे. परंतु समानता ही चलाच्या सर्व किंमतीसाठी सत्य आहे. म्हणुन याला सर्वभौमीक सत्य समीकरण म्हणतात.

समानतेसाठी आपण हे चिन्ह '$\equiv$' वापरतो (समानता बरोबर असे वाचतो.)

11.8 काही महत्वाच्या समानता:

आपण नेहमी काही समानतेचा वापर करतो, जी उदारहणे सोडविण्यास खुप उपयोगी पडते ही समानता गुणाकारात वापरली जाते. याला विशेष गुणाकार सुध्दा म्हणतात. यापैकी तीन महात्वाच्या समानतेचा जो व्दिपदीचा गुणाकार आहे. याचा आपण अभ्यास केला पाहिजे.

SCERT TELANGANA

समजा $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

आता,

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \quad \text{(कारण. } ab = ba\text{)}$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

म्हणुन $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

आता a=2, b=3, घ्या आपणास (डावी बाजु) $= (a + b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

(उजवी बाजु) $= a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

डावी बाजु आणि उजवी बाजु कडे पहा. पदावलीतील डाव्या आणि उजव्या बाजुची किंमत समान आहे. काही धनपुर्णांक, ऋणपुर्णांक आणि भिन्नाशी समानतेची पडताळणी पहा.

हे करा :

खालील समानता आहे कींवा नाही पडताळा करा.

(i) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(ii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(iii) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

अजुन काही समानता घ्या. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

$x = 2, a = 1$ आणि $b = 3$घ्या समानता पडताळुणन पहा.

- तुम्हाला का दिसुन येते ? डावी बाजु = उजवी बाजु आहे का ?
- वरील समानतेच्या पडताळ्यासाठी x, a आणि b च्या वेगवेगळ्या किंमती घेऊन पहा.
- a आणि b च्यासर्व किंमतीसाठी नेहमी डावी बाजु = उजवी बाजु होते का ?

SCERT TELANGANA

हे करा

समजा $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$

(i) 'p'च्या ऐवजी q मांडल्यास तुम्हाला काय दिसुन येते ?

(ii) 'q'च्या ऐवजी p मांडल्यास तुम्हाला काय दिसुन येते ?

(iii) तुमच्या उत्तरात कोणत्या समानता दिसुन येते ?

11.9 समानतेचे उपयोजन:

उदाहरण 8: $(3x + 4y)^2$ माहित करा.

सोडवणुक: $(3x + 4y)^2$ हा दोन व्दिपदीचा गुणाकार आहे. यामध्ये $(3x + 4y)$ आणि $(3x + 4y)$ सारखी पदे आहे. याचा विस्तार व्दिपदीला व्दिपदीने गुणने या गुणाकाराच्या पध्दतीचा वापर करुन करु शकतो. या गुणाकरातील समानतेची तुलना करा. या $a = 3x$ आणि $b = 4y$ चा गुणाकारात $3x$ आणि $4y$ पदे अनुक्रमे a आणि b च्या ठिकाणी पाहिल्या समानतेत $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ मध्ये मांडल्यास आपणास येथे त्याच्या गुणाकाराचे उत्तर येते.

जेव्हा $a = 3x$ आणि $b = 4y$
समानता $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

म्हणुन $(3x + 4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

उदाहरण 9: 204^2 माहित करा

सोडवणुक: $204^2 = (200 + 4)^2$

$= (200)^2 + 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 + 1600 + 16$

$= 41616$

जेव्हा $a = 200$ आणि $b = 4$
समानता $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

हे करा

माहित करा (i) $(5m + 7n)^2$ (ii) $(6kl + 7mn)^2$ (iii) $(5a^2 + 6b^2)^2$ (iv) 302^2 (v) 807^2 (vi) 704^2

(vii) समानतेचा पडताळ करा $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, जेथे $a = 3m$ आणि $b = 5n$

उदाहरण10: $(3m - 5n)^2$ माहित करा

सोडवणुक: $(3m - 5n)^2 = (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2$

$= 9m^2 - 30mn + 25n^2$

जेथे $a = 3m$ आणि $b = 5n$
समानता $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

SCERT TELANGANA

उदाहरण11: 196^2 काढा

सोडवणुक: $196^2 = (200 - 4)^2$

$= 200^2 - 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 - 1600 + 16$

$= 38416$

जेथे $a = 200$ आणि $b = 4$
समानता: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

हे करा

माहित करा (i) $(9m - 2n)^2$ (ii) $(6pq - 7rs)^2$ (iii) $(5x^2 - 6y^2)^2$

(iv) 292^2 (v) 897^2 (vi) 794^2

उदाहरण:12: माहित करा $(4x + 5y)(4x - 5y)$

सोडवणुक: $(4x + 5y)(4x - 5y) = (4x)^2 - (5y)^2$

$= 16x^2 - 25y^2$

जेथे $a = 4x$ आणि $b = 5y$
समानता: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

उदाहरण:13: माहित करा 407×393

सोडवणुक: $407 \times 393 = (400 + 7)(400 - 7)$

$= 400^2 - 7^2$

$= 160000 - 49$

$= 159951$

जेथे $a = 400$ आणि $b = 7$
समानता: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

उदाहरण:14: माहित करा $987^2 - 13^2$

सोडवणुक: $987^2 - 13^2 = (987 + 13)(987 - 13)$

$= 1000 \times 974 = 974000$

जेथे $a = 987$ आणि $b = 13$
समानता: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

हे करा

माहित करा: (i) $(6m + 7n)(6m - 7n)$ (ii) $(5a + 10b)(5a - 10b)$

(iii) $(3x^2 + 4y^2)(3x^2 - 4y^2)$ (iv) 106×94 (v) 592×608 (vi) $92^2 - 8^2$

(vii) $984^2 - 16^2$

उदाहरण15: 302×308 माहित करा

सोडवणुक: $302 \times 308 = (300 + 2)(300 + 8)$

$= 300^2 + (2 + 8)(300) + (2)(8)$

$= 90000 + (10 \times 300) + 16$

$= 90000 + 3000 + 16 = 93016$

जेथे $x = 300$, $a = 2$ आणि $b = 8$
समानता : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

SCERT TELANGANA

उदाहरण16: 93×104 माहित करा

जेथे $x = 100$ $a = -7$ आणि $b = 4$
समानता: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$

सोडवणुक: $93 \times 104 = (100 + (-7))(100 + 4)$

$93 \times 104 = (100 - 7)(100 + 4)$

$= 100^2 + (-7 + 4)(100) + (-7)(4)$

$= 10000 + (-3)(100) + (-28)$

$= 10000 - 300 - 28$

$= 10000 - 328 = 9672$

तुमच्या काय लक्षात आले ? सरळ रितीने गुणाकार माहित करण्यापेक्षा समानतेचा वापर करुन गुणाकार माहित करणे खुप सोपे आहे.

अभ्यास - 11.4

1. योग्य समानेतचा वापर करुन खालील गुणाकार माहित करा.

(i) $(3k + 4l)(3k + 4l)$ (ii) $(ax^2 + by^2)(ax^2 + by^2)$

(iii) $(7d - 9e)(7d - 9e)$ (iv) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$

(v) $(3t + 9s)(3t - 9s)$ (vi) $(kl - mn)(kl + mn)$

(vii) $(6x + 5)(6x + 6)$ (viii) $(2b - a)(2b + c)$

2. योग्य समानतेचा वापर करुन खालील किंमती काढा.

(i) 304^2 (ii) 509^2 (iii) 992^2 (iv) 799^2

(v) 304×296 (vi) 83×77 (vii) 109×108 (viii) 204×206

11.10 समानतेची भुमीतीय तपासणी करा.

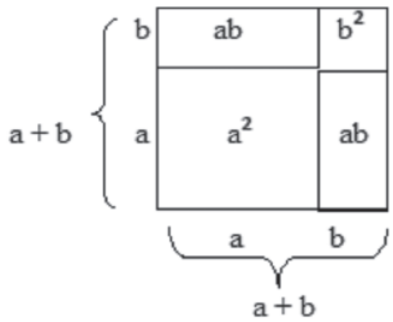
11.10.1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ या समानतेची भुमीतीय तपासणी

खालील चौरस पहा:

$(a + b)$ बाजु असलेला चौरस काढा.

त्याचे क्षेत्रफळ = बाजुचा वर्ग = $(a+b)^2$

आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे चौरसाचे चार भाग पाडा.
यात अनुक्रमे a आणि b बाजु असलेले दोन चौरस आणि a आणि b लांबी आणि रुंदी असलेल्या दोन आयतांचा समावेश आहे.



SCERT TELANGANA

स्पष्टपणे दिलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे चारही भागाच्या क्षेत्रफळाच्या बेरजेला समान आहे.

दिलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ

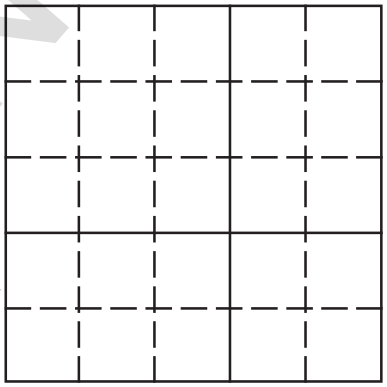
= a बाजु असलेल्यसा चौरसाचे क्षेत्रफळ + a आणि b बाजु असलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ + b आणि a बाजु असलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ + b बाजु असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ

$= a^2 + b^2 + ab + ba$

$= a^2 + 2ab + b^2$

म्हणुन $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

उदाहरण17: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ या समानतेचा $a = 3$ आणि $b = 2$ घेऊन भुमीतीय तपासणी करा.



सोडवणुक: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a + b$ बाजु असलेला चौरस काढा. म्हणजे, $3 + 2$

डावी बाजु पुर्ण चौरसाचे क्षेत्रफळ

$= (3 + 2)^2 = 5^2 = 25$

उजवी बाजु = 3 एकक बाजु असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ

+ 2 एकक बाजु असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ

+ 3,2 एकक बाजु असलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ

+ 2,3 एकक बाजु असलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ

$= 3^2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$

$= 9 + 4 + 6 + 6 = 25$

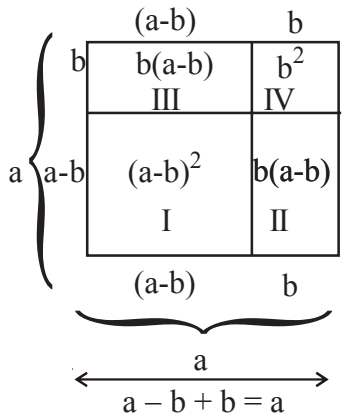
डावी बाजु = उजवी बाजु

$\therefore$ समानतेचा तपासणी झाली.

11.10.2 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ या समानेतची भुमीतीय तपासणी

a बाजु असलेला चौरस घ्या.

- चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजु × बाजु = a^2
- चोरसाला चार भागात विभागले आहे.
- यात अनुक्रमे a – b आणि b बाजु असलेले दोन चौरस आणि अनुक्रमे a – b आणि b लांबी आणि रूंदी असलेल्या दोन आयताचा समावेश आहे.



SCERT TELANGANA

आता, क्षेत्रफळ आकृती I = 'a' बाजु असलेल्या पुर्ण चौरसाचे क्षेत्रफळ

– आकृती II चे क्षेत्रफळ

– आकृती III चे क्षेत्रफळ

– आकृती IV चे क्षेत्रफळ

$(a-b)^2 = a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$

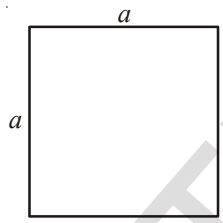
$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

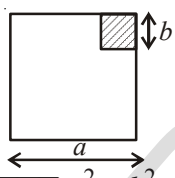
11.10.3 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ या समानतेची भुमीतीय तपासणी

$a^2 - b^2 =$ (a बाजु असणाऱ्यां चौरसाचे क्षेत्रफळ) – (b बाजु असणाऱ्या चौरसाचे क्षेत्रफळ)

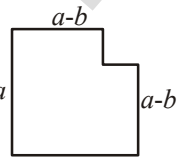
खालील चौरस पहा.



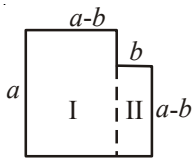
bबाजु ($b < a$) असलेला चौरस यातुन कापा.



आपणास मिळते



यात दोन भाग आहेत



म्हणुन $a^2 - b^2 =$ आकृती Iचे क्षेत्रफळ + आकृती II चे क्षेत्रफळ

$= a(a - b) + b(a - b)$

$= (a - b)(a + b)$

अशा प्रकारे $a^2 - b^2 \equiv (a - b)(a + b)$

अभ्यास - 11.5

1. खालील किंमती घेऊन $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ समानतेची भुमीतीय तपासणी करा.

   (i) $a = 2$ एकक, $b = 4$ एकक

   (ii) $a = 3$ एकक, $b = 1$ एकक

   (iii) $a = 5$ एकक, $b = 2$ एकक

SCERT TELANGANA

2. खालील किंमती घेऊन $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ समानतेची भुमीतीय तपासणी करा.

   (i) $a = 3$ एकक, $b = 1$ एकक

   (ii) $a = 5$ एकक, $b = 2$ एकक

3. खालील किंमती घेऊन $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ समानतेची भुमीतीय तपासणी करा.

   (i) $a = 3$ एकक, $b = 2$ एकक

   (ii) $a = 2$ एकक, $b = 1$ एकक

आपण काय चर्चा केली

1. अनेक संदर्भात आपणास बैजिक पदावलीचा गुणाकार करण्याची गरज पडते. उदाहरणात आयताचे क्षेत्रफळ काढतांना ज्याची बाजु पदावलीत दिली आहेत.
2. एका पदीला एकपदीशी गुणाकार केल्यास नेहमी एकपदीच येते.
3. बहुपदीला एकपदीशी गुणाकार करतांना बहुपदीतील प्रत्येक पदास एकपदीने गुणाकार करावा लागतो.
4. बहुपदीला व्दिपदीशी गुणाकार करतांना (किंवा त्रिपदी), प्रत्येक बहुपदीच्या पदास, व्दिपदीतील प्रत्येक पदाने गुणाकार करावा लागतो. लक्षात घ्या की, अशा गुणाकारात आपणास येणाऱ्या गुणाकारात सजातीय आणि एकत्र पदे येतात.
5. समीकरणातील समानता ही समीकरणातील चलाच्या सर्व किंमतीसाठी सत्य होते. दुसऱ्या बाजुस जर समीकरण काही चलांच्या काही विशिष्ट किंमतीसाठी सत्य झाल्यास तो समानता होत नाही.
6. खालील समानता आहेत.

   (I) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   (II) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

   (III) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

   (IV) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
7. वरील चार समानता चौरस आणि बैजिक पदावलीचा गुणाकारासाठी उपयोगी पडते. ते संख्याचा गुणाकार माहित करण्यासाठी सोप्या इतर पध्दतीत सुध्दा स्विकारते.

SCERT TELANGANA

धडा 12

अवयव पाडणे

12.0 प्रस्तावणा

समजा, एक संख्या 42 घ्या. 42 ला कोणत्याही दोन संख्येच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

$$42 = 1 \times 42$$
$$= 2 \times 21$$
$$= 3 \times 14$$
$$= 6 \times 7$$

अशा तऱ्हेने 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 आणि 42 हे 42 चेअवयव आहेत.

वरील घटकांपैकी कोणत्या मुळ संख्या आहेत ते सांगा.?

तुम्ही 42 ला मुळ संख्येचा गुणाकाराच्या रुपात लिहु शकतो का ? प्रयत्न करा.

रफीने असे केले	शिरीशाने असे केले	अकबर ने असे केले
$42 = 2 \times 21$ $= 2 \times 3 \times 7$	$42 = 3 \times 14$ $= 2 \times 3 \times 7$	$42 = 6 \times 7$ $= 2 \times 3 \times 7$

तुमच्या लक्षात काय आले ? आपणास असे दिसुन आले की, प्रत्येक संदर्भात $2 \times 3 \times 7$ हा मुळ अवयवाच्या गुणाकार आहे.

आता दुसरी संख्या '70' घ्या.

70 चे अवयव 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 आणि 70 आहेत.

70 ला $2 \times 5 \times 7$ मुळ अवयवाच्या रुपात लिहु शकतो.

अवयव पाडण्याचे रुप जेथे सर्व अवयव मुळ संख्या आहेत. यालाच गुणाकाराचे मुळ अवयव रुप असे म्हणतात

$$70 = 1 \times 70$$
$$= 2 \times 35$$
$$= 5 \times 14$$
$$= 7 \times 10$$

हे करा :

दिलेल्या संख्याना मुळ अवयवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहा.

(i) 48 (ii) 72 (ii) 96

संख्या प्रमाणेच आपण बैजिक पदावलीस त्याच्या अवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात सुध्दा व्यक्त करु शकतो. या धड्यात आपण विविध बैजिक पदावलिच्या अवयवा बद्दल शिकणार आहोत

SCERT TELANGANA

12.1 बैजीक पदावलीचे अवयव

खालील उदाहरण घेऊ या.

$7yz = 7(yz) \rightarrow 7$ आणि yz अवयव आहेत.

$= 7y(z) \rightarrow 7y$ आणि z अवयव आहेत.

$= 7z(y) \rightarrow 7z$ आणि y अवयव आहेत.

$= 7 \times y \times z \rightarrow 7, y$ आणि z आहेत.

वरील अवयवामध्ये $7, y, z$ हे अलघुकरणीय अवयव आहे. अलघुकरणीय हा शब्द मुळ या शब्दाच्या ऐवजी बैजीक पदावलीत वापरला आहे. अशा तऱ्हेने आपण म्हणतो की $7 \times y \times z$ हा $7yz$ चे अलघुकरणीय रुप आहे. लक्षात घ्या की, $7 \times (yz)$ किंवा $7y(z)$ किंवा $7z(y)$ हे अलघुकरणीय रुप नाहीत.

> 1 हा $7yz$ चा अवयव आहे. कारण $7yz = 1 \times 7 \times y \times z$. वास्तविक रित्या 1 हा प्रत्येक पदाचा अवयव आहे. वेगळा दाखविण्याची गरज नाही.

आता, पदावली $7y(z+3)$ घ्या यास $7y\ (z + 3) = 7 \times y \times (z+3)$ असे लिहिता यते येथे $7, y, (z + 3)$ हे अलघुकरणीय अवयव आहेत.

अशा रितीने $5x\ (y+2)\ (z+3) = 5 \times x \times (y + 2) \times (z + 3)$ येथे $5\ ,\ x\ ,\ (y + 2)\ ,\ (z + 3)$ हे अलघुकरणीय अवयव आहेत.

हे करा

1. खालील अवयव पाडा:

(i) $8x^2yz$ (ii) $2xy\ (x + y)$ (iii) $3x + y^3z$

12.2 अवयव पाडण्याची गरज

जेव्हा बैजिक राशीचे अवयव पाडतात. तेव्हा त्यांस अवयवांच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहितात. हे अवयव संख्या, बैजिक चले, किंवा बैजिक पदे आहेत.

बैजिक पदावलीत $23a + 23b + 23c$. यास $23(a + b + c)$,असे लिहितात. इथे 23 आणि $(a + b + c)$ हे अलघुकरणीये अवयव आहेत. 23 हा संख्येच्या रुपात असलेला अवयव आणि $(a + b + c)$ ही बैजिक पदावली आहे.

समजा बैजिक पदावली (i) $x^2y + y^2x + xy$ (ii) $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$.

पहिली पदावली $x^2y + y^2x + xy = xy(x + y + 1)$ अशा तऱ्हेने वरील बैजिक पदावली सोप्या रुपात लिहिली आहे.

SCERT TELANGANA

दुसऱ्या संदर्भात $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$

$$\frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{(2x)^2-(1)^2}{2x-1}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)}$$

$$= (2x + 1)$$

वरील स्पष्टीकरणावरुन लक्षता आले की, अवयव पाडणे बैजिक पदावलीस सोप्या रुपात लिहिण्यासाठी उपयोगी पडते आणि ते बैजिक पदावलीच्या भागाकारात सुध्दा उपयोगी पडते.

बैजीक पदावलीच्या अवयव पाडण्याच्या काही पध्दतीची चर्चा करु या.

12.3 सामान्य अवयवाची पध्दत

चला $3x + 12$ चे अवयव पाडा.

प्रत्येक पदास अवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहिण्यास आपणास

येते $3x + 12 = (3 \times x) + (2 \times 2 \times 3)$

दोन्ही पदात सामाईक अवयव कोणता आहे ?

सामाईक अवयव 3 घेतल्यास

$3 \times [x + (2\times2)] = 3 \times (x + 4) = 3 (x + 4)$

अशा रितीने पदावली $3x + 12$ ही $3 (x + 4)$ सारखीच आहे.

लक्षता घ्या की, 3 आणि $(x + 4)$ हे $3x + 12$ चे न बदलणारे अवयव आहेत.

आता, दुसऱ्या पदावली $6ab+12b$ चे अवयव पाडु

$6ab+12b = (\underline{2 \times 3} \times a \times \underline{b}) + (2 \times \underline{2 \times 3 \times b})$

$= \underline{2 \times 3 \times b} \times (a + 2) \quad = 6b (a + 2)$

लक्षात ठेवा की, 6b हा 6ab आणि 12b चा म.सा.वी. आहे.

$\therefore\ 6ab + 12b = 6b (a + 2)$

उदाहरण 1: अवयव पाडा (i) $6xy + 9y^2$ (ii) $25 a^2b + 35ab^2$

सोडवणुक: (i) $6xy + 9y^2$

आपण येथे $6xy = 2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}$ आणि $9y^2 = 3 \times \underline{3 \times y} \times y$

दोन्ही पदांचे 3 आणि 'y' सामान्य अवयव आहेत.

SCERT TELANGANA

म्हणुन, $6xy + 9y^2$

$= (2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}) + (3 \times \underline{3 \times y} \times y)$ (पदांना एकत्र करुन)

$= \underline{3 \times y} \times [(2 \times x) + (3 \times y)]$

लक्ष्यात घ्या की, पदावलीचे अवयव रुप, एकच पद होऊ शकते.

$\therefore\ 6xy + 9y^2 = 3y(2x + 3y)$

(ii) $25a^2b + 35ab^2 = (5 \times \underline{5} \times a \times \underline{a \times b}) + (\underline{5} \times 7 \times \underline{a \times b} \times b)$

$= \underline{5 \times a \times b} \times [(5 \times a) + (7 \times b)]$

$= 5ab\,(5a + 7b)$

$\therefore\ 25a^2b + 35ab^2 = 5ab\,(5a + 7b)$

उदाहरण 2: अवयव पाडा $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$

सोडवणुक: $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = (\underline{3 \times x} \times x) + (2 \times \underline{3 \times x} \times x \times y) + (3 \times \underline{3 \times x} \times y \times y)$

$= \underline{3 \times x}\,[x + (2 \times x \times y) + (3 \times y \times y)]$

$= 3x\,(x + 2xy + 3y^2)$

$\therefore\ 3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = 3x\,(x + 2xy + 3y^2)$ ($3 \times x$ चे सामान्य अवयव घेऊन)

हे करा.

अवयव काढा. (i) $9a^2 - 6a$ (ii) $15a^3b - 35ab^3$ (iii) $7lm - 21lmn$

12.4 पदांचे गट बनवुन अवयव पाडणे

पदावली $ax + bx + ay + by$. पहा. तुम्हाला आढळुन येते की, पहिल्या दोन पदात सामान्य अवयव 'x' आहे. आणि शेवटच्या दोन पदात सामन्य अवयव 'y'आहे. परंतु त्यासर्व पदात एकही सामान्य अवयव नाही. अशा पदावलीचे अवयव कसे पाडतात. पाहु या.

पदांचे गट बनविल्यास आपणास $(ax + bx) + (ay + by)$ येते.

$(ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b)$ (प्रत्येक गटातुन सामान्य अवयव बाहेर काढुन)

$= (a + b)(x + y)$ (गटातुन सामान्य अवयव बाहेर काढुन)

$ax + bx + ay + by$ पदावलीत त्याच्या अवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात व्यक्त करता येते.$(a+b)$ आणि $(x + y)$, हे अवयव आहेत. हे अवयव अलघुकरणीय आहेत.

वरील पदावलीस दुसऱ्या पध्दतीने अवयव काढता येते.

$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$

$= a(x + y) + b(x + y)$

$= (x + y)(a + b)$

नोंद घ्या की, अवयव समान आहेत परंतु क्रम समान नाहीत.

SCERT TELANGANA

हे करा

अवयव पाडा (i) $5xy + 5x + 4y + 4$ (ii) $3ab + 3b + 2b + 2$

उदाहरण 3: $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ चे अवयव पाडा.

सोडवणुक: पायरी 1: सर्व पदात कोणतेही सामान्य अवयव आहे. का तपासणी करा. नक्कीच एकही नाही.

पायरी 2: पहिल्या दोन पदाचे गट पाडल्यास

$6ab - b^2 = b(6a - b)$ ———I

तुम्हाला पदावलीतील शेवटच्या दोन पदांच्या क्रम बदलावा लागतो. यांची नोंद घ्या.

$12ac - 2bc$.

अशा रितीने $12ac - 2bc = 2c(6a - b)$ ———II

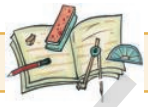
पायरी 3: I आणि II एकत्र केल्यास

$6ab - b^2 - 2bc + 12ac = b(6a - b) + 2c(6a - b)$

$= (6a - b)(b + 2c)$

सामान्य अवयव $(6a - b)$ ला बाहेर काढुन

$6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ चे अवयव $(6a - b)$ आणि $(b + 2c)$ आहेत.



अभ्यास - 12.1

1. दिलेल्या पदाचे सामान्य अवयव पाडा

(i) $8x, 24$ (ii) $3a, 21ab$ (iii) $7xy, 35x^2y^3$ (iv) $4m^2, 6m^2, 8m^3$

(v) $15p, 20qr, 25rp$ (vi) $4x^2, 6xy, 8y^2x$ (vii) $12x^2y, 18xy^2$

2. खालील पदावलीचे अवयव पाडा.

(i) $5x^2 - 25xy$ (ii) $9a^2 - 6ax$ (iii) $7p^2 + 49pq$

(iv) $36a^2b - 60a^2bc$ (v) $3a^2bc + 6ab^2c + 9abc^2$

(vi) $4p^2 + 5pq - 6pq^2$ (vii) $ut + at^2$

3. खालील अवयव पाडा

(i) $3ax - 6xy + 8by - 4ab$ (ii) $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

(iii) $m^2 - mn + 4m - 4n$ (iv) $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ (iv) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

SCERT TELANGANA

12.5 समानतेचा वापर करुन अवयव पाडणे

आपणास माहित आहे $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ बैजिक समानता आहेत.

जर दिलेली पदावली एका विशिष्ट समानतेचा उजव्या बाजुच्या रुपात असेल तर याचा वापर अवयव पाडण्यासाठी होतो.

काही उदाहरणे पाहु या

उदाहरण 4: $x^2 + 10x + 25$ चे अवयव पाडा

सोडवणुक: दिलेल्या पदावलीत तिन पदे आहेत. आणि पहिले आणि तिसरे पद पुर्ण वर्ग आहेत. म्हणजेच x^2 आणि 25 (5^2)मधल्या पदात धनचिन्ह आहे. यावरुन $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$ अशा रुपात लिहिता येते.

म्हणजेच $x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2$

याची तुलना $a^2 + 2ab + b^2$ जी समानतेच्या डाव्या बाजुच्या समान आहे.

म्हणजेच $(a + b)^2$ येथे $a = x$ आणि $b = 5$ आहे

आपणास $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$ येते.

उदाहरण 5: $16z^2 - 48z + 36$ चे अवयव पाडा.

सोडवणुक: दिलेल्या पदावलीतील संख्याच्या रुपातील सामान्य अवयव घेतल्यास

$16z^2 - 48z + 36 = (4 \times 4z^2) - (4 \times 12z) + (4 \times 9) = 4(4z^2 - 12z + 9)$ येते.

लक्षात घ्या $4z^2 = (2z)^2$; $9 = (3)^2$ आणि $12z = 2(2z)(3)$

$4z^2 - 12z + 9 = (2z)^2 - 2(2z)(3) + (3)^2$ कारण $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$= (2z - 3)^2$

तुलनेवरुन , $16z^2 - 48z + 36 = 4(4z^2 - 12z + 9) = 4(2z - 3)^2$

$= 4(2z - 3)(2z - 3)$

उदाहरण 6: $25p^2 - 49q^2$ अवयव पाडा

सोडवणुक: आपल्या लक्षात आले की, पदावली ही दोन पुर्ण वर्गातितील फरक आहे.

म्हणजेच पदावलीचे रुप $a^2 - b^2$आहे.

म्हणुन समानता $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ वापरते.

$25p^2 - 49q^2 = (5p)^2 - (7q)^2$

$= (5p + 7q)(5p - 7q)$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

म्हणुन $25p^2 - 49q^2 = (5p + 7q)(5p - 7q)$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 7: $48a^2 - 243b^2$ चे अवयव पाडा

सोडवणुक: दोन पदे पुर्णवर्ग नाहीत परंतु दोन्हीत 3 हा सामान्य अवयव आहे. हे आपल्याला दिसते.

म्हणजे $48a^2 - 243b^2 = 3\,[16a^2 - 81b^2]$

$= 3\,[(4a)^2 - (9b)^2]$ पुन्हा $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$= 3\,[(4a + 9b)(4a - 9b)]$

$= 3\,(4a + 9b)(4a - 9b)$

उदाहरण 8: $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$ अवयव पाडा.

सोडवणुक: पदावलीतील पहिली तिन पदे $(x + y)^2$ च्या रुपात आणि चौथे पद पुर्ण वर्ग आहे.

म्हणुन $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x + y)^2 - (2z)^2$

$= [(x + y) + 2z]\,[(x + y) - 2z]$

$= (x + y + 2z)\,(x + y - 2z)$

उदाहरण 9: $p^4 - 256$ अवयव पाडा.

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

सोडवणुक: $p^4 = (p^2)^2$ आणि $256 = (16)^2$

अशारितीने $p^4 - 256 = (p^2)^2 - (16)^2$

$= (p^2 - 16)(p^2 + 16)$

$= (p+4)(p-4)(p^2 + 16)$

पुन्हा $p^2 - 16 = (p+4)(p-4)$

12.6 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ रुपातील अवयव

$x^2 + 12x + 35$, $x^2 + 6x - 27$, $a^2 - 6a + 8$, $3y^2 + 9y + 6$.... पदावलीयाचे निरिक्षण करा. या पदावलीचे अवयव मागील समानतेचा उपयोगाने काढता येत नाही. कारण स्थिरांक ही पुर्णवर्ग संख्या नाही.

$x^2 + 12x + 35$ घ्या.

या सर्व पदास अवयव पाडण्यासाठी गट बनवता येत नाही 35 च या दोन अवयवाकडे पाहु या. ज्याची बेरीज 12 येते. ती $x^2 + (a + b)x + ab$ या रुपात आहे.

स्थिरांकाला संभाव्य दोन अवयवयाच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहिल्यास

$35 = 1 \times 35$	$1 + 35 = 36$
$(-1) \times (-35)$	$-1 - 35 = -36$
5×7	$5 + 7 = 12$
$(-5) \times (-7)$	$-5 - 7 = -12$

कोणत्या जोंडीची बेरीज मधल्या पदाचे सहगुणक होते ? वैकल्पिक रित्या ते $5 + 7 = 12$ आहे.

SCERT TELANGANA

$\therefore\ x^2 + 12x + 35 = x^2 + 5x + 7x + 35$ $(\because\ 12x = 5x + 7x)$

$= x(x + 5) + 7(x + 5)$ (सामान्य अवयवाला बाहेर वेगळे करुन)

$= (x + 5)(x + 7)$ (सामान्य अवयव $(x + 5)$ बाहेर करुन)

वरील चर्चेवरुन असा निश्कर्ष निघतो की, $x^2 + (a + b)x + ab$ रुपात लिहिलेल्या पदावलीचे अवयव पाडता येते ते $(x + a)(x + b)$ आहेत.

उदाहरण 10: $m^2 - 4m - 21$ अवयव पाडा

सोडवणुक: $m^2 - 4m - 21$ ची तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$ या समानतेशी केली असता आपणास लक्षात येते की,

$ab = -21$, आणि $a+b = -4$. म्हणुन, $(-7) + 3 = -4$ आणि $(-7)(3) = -21$

–21चे अवयव आणि त्याची बेरीज	
$-1 \times 21 = -21$	$-1 + 21 = 20$
$1 \times (-21) = -21$	$1 - 21 = -20$
$-7 \times 3 = -21$	$-7 + 3 = -4$
$-3 \times 7 = -21$	$-3 + 7 = 4$

म्हणुन $m^2 - 4m - 21 = m^2 - 7m + 3m - 21$

$= m(m - 7) + 3(m - 7)$

$= (m - 7)(m + 3)$

म्हणुन $m^2 - 4m - 21 = (m - 7)(m + 3)$

उदाहरण 11: $4x^2 + 20x - 96$ अवयव पाडा

सोडवणुक: आपल्या लक्षात येते की, 4 हा सर्व पदातील सामान्य अवयव आहे.

अशा तऱ्हेने $4x^2 + 20x - 96 = 4[x^2 + 5x - 24]$

–24 चे अवयव आणि त्याची बेरीज	
$-1 \times 24 = -24$	$-1 + 24 = 23$
$1 \times (-24) = -24$	$1 - 24 = -23$
$-8 \times 3 = -24$	$3 - 8 = -5$
$-3 \times 8 = -24$	$-3 + 8 = 5$

आता, $x^2 + 5x - 24$

$= x^2 + 8x - 3x - 24$

$= x(x + 8) - 3(x + 8)$

$= (x + 8)(x - 3)$

म्हणुन $4x^2 + 20x - 96 = 4(x + 8)(x - 3)$

अभ्यास - 12.2

1. खालील पदावलीचे अवयव पाडा.

(i) $a^2 + 10a + 25$ (ii) $l^2 - 16l + 64$ (iii) $36x^2 + 96xy + 64y^2$

(iv) $25x^2 + 9y^2 - 30xy$ (v) $25m^2 - 40mn + 16n^2$

(vi) $81x^2 - 198xy + 12ly^2$ (vii) $(x+y)^2 - 4xy$ (सुचना : विस्तार करा. $(x + y)^2$

(viii) $l^4 + 4l^2m^2 + 4m^4$

SCERT TELANGANA

2. खालील अवयव पाडा

(i) $x^2 - 36$ (ii) $49x^2 - 25y^2$ (iii) $m^2 - 121$

(iv) $81 - 64x^2$ (v) $x^2y^2 - 64$ (vi) $6x^2 - 54$

(vii) $x^2 - 81$ (viii) $2x - 32x^5$ (ix) $81x^4 - 121x^2$

(x) $(p^2 - 2pq + q^2) - r^2$ (xi) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

3. खालील अवयव काढा

(i) $lx^2 + mx$ (ii) $7y^2 + 35Z^2$ (iii) $3x^4 + 6x^3y + 9x^2Z$

(iv) $x^2 - ax - bx + ab$ (v) $3ax - 6ay - 8by + 4bx$ (vi) $mn + m + n + 1$

(vii) $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$ (viii) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$ (ix) $x(y+z) - 5(y+z)$

4. खालील अवयव पाडा

(i) $x^4 - y^4$ (ii) $a^4 - (b+c)^4$ (iii) $l^2 - (m - n)^2$

(iv) $49x^2 - \frac{16}{25}$ (v) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ (vi) $4(a+b)^2 - 9(a - b)^2$

5. खालील पदावलीचे अवयव पाडा.

(i) $a^2 + 10a + 24$ (ii) $x^2 + 9x + 18$ (iii) $p^2 - 10p + 21$ (iv) $x^2 - 4x - 32$

6. एका त्रिकोनाच्या बाजुंची लांबी पुर्णांकसंख्या आहे. आणि त्याचे क्षेत्रफळ सुध्दा पुर्णांक संख्या आहे. त्याची एक बाजु 21 आणि परिमीती 48 आहे. तर त्याच्या सर्वात लहान बाजुची लांबी काढा.

7. $x^2 + 3xy + x + my - m$ ला x, आणि y या दोन्ह रेषीय अवयवाच्या रुपात लिहिल्यास 'm' ची किंमत काढा.

12.7 बैजिक पदावलीचा भागाकार

आपल्याला माहित आहे की, भागाकार ही गुणाकाराची उलट क्रिया आहे.

$3x \times 5x^3 = 15x^4$ घ्या.

नंतर $15x^4 \div 5x^3 = 3x$ आणि $15x^4 \div 3x = 5x^3$

त्याच प्रमाणे $6a(a + 5) = (6a^2 + 30a)$

म्हणुन $(6a^2 + 30a) \div 6a = a + 5$

आणि $(6a^2 + 30a) \div (a+5) = 6a.$

12.8 एकपदीला दुसऱ्या एकपदीने भागणे.

$24x^3 \div 3x$ घ्या.

$$\therefore\ 24x^3 \div 3x$$

$$= \frac{2\times2\times2\times3\times x\times x\times x}{3\times x}$$

$$= \frac{(3\times x)(2\times2\times2\times x\times x)}{(3\times x)} = 8x^2$$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 12: खालील भागाकार करा

(i) $70x^4 \div 14x^2$ (ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$

सोडवणुक: (i) $70x^4 \div 14x^2 = \dfrac{2\times5\times7\times x\times x\times x\times x}{2\times7\times x\times x}$

$= \dfrac{5\times x\times x}{1}$

$= 5x^2$

(ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz = \dfrac{4\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z}{12\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{1}{3}x^2y^2z^2$

12.9 पदावलीला एकपदीने भागाकार करणे

त्रिपदीचा भागाकार पाहु या

$6x^4+10x^3+8x^2$ त्या $2x^2$ या एकपदीने भागा.

$6x^4 + 10x^3 + 8x^2 = [2\times3\times x\times x\times x\times x] + [2\times5\times x\times x\times x] + [2\times2\times2\times x\times x]$

$= \underline{(2x^2)}(3x^2) + \underline{(2x^2)}(5x) + \underline{2x^2}(4)$

$= 2x^2[3x^2 + 5x + 4]$

$2x^2$ हा सामान्य अवयव आहे याची नोंद

अशा प्रकारे $(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4+10x^3+8x^2}{2x^2} = \dfrac{2x^2(3x^2+5x+4)}{2x^2}$

$= (3x^2 + 5x + 4)$

वैकल्पीकरीता पदावलीतील प्रत्येक पदास एक पदीने खोडण्याच्या पध्दतीचा वापर करुन भागाकार करणे.

$(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4}{2x^2} + \dfrac{10x^3}{2x^2} + \dfrac{8x^2}{2x^2}$

$= 3x^2 + 5x + 4$

इथे अंशातील पदावलीच्या प्रत्येक पदास छेदातील एकपदीने भाग देतो.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 13: $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$ ला $6\,abc$ ने भागाकार करा.

सोडवणुक : $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$

$= 2 \times 3 \times 5\,[(a \times a \times b \times c) + (a \times b \times b \times c) + (a \times b \times c \times c)]$

$= 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c\ (a + b + c)$

अशा तऱ्हेने $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{2\times3\times5\times abc(a+b+c)}{2\times3\times abc}$$

$= 5\,(a + b + c)$

वैकल्पीकरीत्या $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{30a^2bc}{6abc} + \frac{30ab^2c}{6abc} + \frac{30abc^2}{6abc}$$

$= 5a + 5b + 5c$

$= 5\,(a + b + c)$

12.10 पदावलीचा पदावलीने भागाकार

$(3a^2 + 21a) \div (a+7)$ घ्या

पहिल्या अवयव $3a^2 + 21a$ चे अवयव पाडुन त्याच्या छेदाशी तपासणी करुन अवयव जुळवुन पहा.

$$(3a^2 + 21a) \div (a+7) = \frac{3a^2 + 21a}{a+7}$$

$$= \frac{3a\,(a+7)}{a+7} = 3a$$

$= 3a$

उदाहरण 14: $39y^3(50y^2 - 98)$ ला $26y^2(5y+7)$ ने भागाकार करा

सोडवणुक : $39y^3(50y^2 - 98) = 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [2\,(25y^2 - 49)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y)^2 - (7)^2]$ $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y + 7)\ (5y - 7)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times (5y + 7)\ (5y - 7)$

म्हणजे $26y^2(5y + 7) = 2 \times 13 \times y \times y \times ((5y + 7)$

SCERT TELANGANA

$\therefore \quad [\,39y^3(50y^2 - 98)\,] \div [\,26y^2(5y + 7)\,]$

$$= \frac{[2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y(5y+7)(5y-7)]}{[2 \times 13 \times y \times y \times (5y+7)]}$$

$= 3y\,(5y - 7)$

उदाहरण 15: $m^2 - 14m - 32$ ला $m+2$ ने भागाकार करा.

सोडवणुक : $m^2 - 14m - 32 = m^2 - 16m + 2m - 32$ दिले आहे.

$= m(m - 16) + 2(m - 16)$

$= (m - 16)(m+2)$

$(m^2 - 14m - 32) \div m+2 = (m - 16)(m+2) \div (m+2)$

$= (m - 16)$

उदाहरण 16: $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2)$ ला $7a(a - 4)$ ने भागाकार करा

सोडवणुक : $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 13a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 9a - 4a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [a(a - 9) - 4(a - 9)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [(a - 9)(a - 4)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4)$

$42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) \div 7a(a - 4) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4) \div 7a(a - 4)$

$= 6a(a - 9)$

उदाहरण 17: $x(3x^2 - 108)$ ला $3x(x - 6)$ ने भागाकार करा.

सोडवणुक : $x(3x^2 - 108) = x \times [\,3(x^2 - 36)]$

$= x \times [\,3(x^2 - 6^2)]$

$= x \times [3(x + 6)(x - 6)]$

$= 3 \times x \times [\,(x + 6)(x - 6)]$

$x(3x^2 - 108) \div 3x(x - 6) = 3 \times x \times [\,(x + 6)(x - 6)] \div 3x(x - 6)$

$= (x + 6)$

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 12.3

1. खालील भागाकार करा.

(i) $48a^3$ ला $6a$ ने (ii) $14x^3$ ला $42x^2$ ने

(iii) $72a^3b^4c^5$ ला $8ab^2c^3$ने (iv) $11xy^2z^3$ ला $55xyz$ने (v) $-54l^4m^3n^2$ ला $9l^2m^2n^2$ने

2. दिलेल्या बहुपदीला एकपदीने भागाकार करा.

(i) $(3x^2 - 2x) \div x$ (ii) $(5a^3b - 7ab^3) \div ab$

(iii) $(25x^5 - 15x^4) \div 5x^3$ (iv) $(4l^5 - 6l^4 + 8l^3) \div 2l^2$

(v) $15\,(a^3b^2c^2 - a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3) \div 3abc$ (vi) $(3p^3 - 9p^2q - 6pq^2) \div (-3p)$

(vii) $(\frac{2}{3}a^2b^2c^2 + \frac{4}{3}ab^2c^2) \div \frac{1}{2}abc$

3. खालील भागाकार करा.

(i) $(49x - 63) \div 7$ (ii) $12x\,(8x - 20) \div 4(2x - 5)$

(iii) $11a^3b^3(7c - 35) \div 3a^2b^2(c - 5)$

(iv) $54lmn\,(l + m)\,(m + n)\,(n + l) \div 81mn\,(l + m)\,(n + l)$

(v) $36\,(x + 4)\,(x^2 + 7x + 10) \div 9\,(x + 4)$ (vi) $a\,(a + 1)\,(a + 2)\,(a + 3) \div a\,(a + 3)$

4. पदावलीचे अवयव पाडा आणि त्यास सरळ भागाकार करा.

(i) $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 3)$ (ii) $(x^2 - 8x + 12) \div (x - 6)$

(iii) $(p^2 + 5p + 4) \div (p + 1)$ (iv) $15ab\,(a^2 - 7a + 10) \div 3b\,(a - 2)$

(v) $15lm\,(2p^2 - 2q^2) \div 3l\,(p + q)$ (vi) $26z^3(32z^2 - 18) \div 13z^2(4z - 3)$

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

विविध क्रिया असलेली बैजीक पदावली सोडविण्यासाठी काही विद्यार्थ्यांनी खालील प्रकारे सोडविले. त्यांनी केलेल्या चुका तुम्ही ओळखु शकता काय? अचुक उत्तर लिहा.

1. श्रीलेखाने, दिलेले समीकरण खाली दाखविल्याप्रमाणे सोडविले.

$3x + 4x + x + 2x = 90$

$9x = 90$ म्हुणन $x = 10$

सोडवणुकीच्या दुरुस्ती बद्दल काय म्हणता येते ?

श्रीलेखाने, कुठे चुक केली तुम्ही ओळखु शकता का ?

SCERT TELANGANA

वर्ग प्रकल्प 2 : अब्राहम ने खालील प्रमाणे केले

समजा $x = -4$, $7x = 7 - 4 = -3$ साठी

ऋण संख्याचा गुणाकार करतांना कंसाचा उपयोग करण्याची आठवण ठेवा

वर्ग प्रकल्प 3 : जॉन आणि रेश्मा ने खालील पद्धतीवरुन बैजीक पदावलीचा गुणाकार केला. कुणाचा गुणाकार अचुक आहे. तपासणी करा.

जॉन	रेश्मा
(i) $3(x-4) = 3x - 4$	$3(x-4) = 3x - 12$
(ii) $(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(iii) $(2a-3)(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(iv) $(x+8)^2 = x^2 - 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$

वर्ग प्रकल्प 4 : हरमीतनी भागाकार असा केला. $(a + 5) \div 5 = a+1$

त्याचा मित्र श्रीकर ने असाच केला $(a + 5) \div 5 = a$

आणि त्याची मैत्रिण रोजी ने अशा प्रकारे केला $(a + 5) \div 5 = a/5 + 1$

कोणाचे बरोबर आहे तुम्ही अंदाज लावु शकता काय ? स्पष्ट करा.

अभ्यास 12.4

खालील गणिताच्या विधानातील चुका माहित करुन ती विधाने दुरुस्त करा.

(i) $3(x-9) = 3x - 9$

(ii) $x(3x+2) = 3x^2 + 2$

(iii) $2x + 3x = 5x^2$

(iv) $2x + x + 3x = sx$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = 0$

(vi) $3x + 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 3x^2 + 4x + 7$

(viii) $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

(ix) $(2a+3)^2 = 2a^2 + 6a + 9$

(x) $x = -3$ खालील मध्ये मांडा

(a) $x^2 + 7x + 12 = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 9 + 4 + 12 = 25$

(b) $x^2 - 5x + 6 = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(c) $x^2 + 5x = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = -9 - 15 = -24$

(xi) $(x-4)^2 = x^2 - 16$

(xii) $(x+7)^2 = x^2 + 49$

SCERT TELANGANA

(xiii) $(3a+4b)(a-b) = 3a^2 - 4a^2$ (xiv) $(x+4)(x+2) = x^2 + 8$

(xv) $(x-4)(x-2) = x^2 - 8$ (xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 0$

(xvii) $2x^3 + 1 \div 2x^3 = 1$ (xviii) $3x + 2 \div 3x = \frac{2}{3x}$

(xix) $3x + 5 \div 3 = 5$ (xx) $\frac{4x+3}{3} = x + 1$

आपण काय चर्चा केली.

1. अवयव पाडणे ही दिलेल्या पदावलीस त्याच्या अवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहिण्याची एक पद्धत आहे.
2. अवयव जो समोर अवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात व्यक्त करता येत नाही तो अलघुकरणीय अवयव आहे.
3. पदावली जी खालील रुपात बदलता येते. $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2$ आणि $x^2 + (a+b)x + ab$ याचे अवयव समानतेच्या गुणधर्मावरुन पाडता येते.
4. जर दिलेली पदावलीत $x^2 + (a+b)x + ab$, या रुपात असल्यास त्याचे अवयव $(x+a)(x+b)$ आहेत.
5. भागाकार ही गुणाकाराची उलट क्रिया आहे. या कल्पनेचा बैजिक पदावलीच्या भागाकारास सुध्दा लागु आहे.

गोल्ड बाकची कल्पना

Gold Bach च्या निरिक्षणावरुन आढळुन आले की, प्रत्येक विषम संख्या ही मुळ संख्या किंवा मुळसंख्याची बेरीज आणि वर्गाच्या दुप्पट असते.

अशा प्रकारे $21 = 19 + 2$ किंवा $13 + 8$ किंवा $3 + 18$.

त्यांनी वरील प्रमाणे 9000 संख्ये पर्यंत पहाणी केली. त्यांनी फक्त दोन संख्या

$5777 = 53 \times 109$ आणि $5993 = 13 \times 641$ ला फक्त सुट देण्यात आली.

या मुळ संख्या नाही, किंवा मुख्य संख्यांची बेरीज नाही आणि वर्गाची दुप्पट सुध्दा नाही.

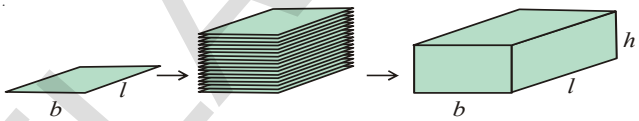
SCERT TELANGANA

धडा 13

3-D चे 2-D मध्ये दृष्यमान

13.0 प्रस्तावणा

आपण 3-D जगात राहात आहोत. आपल्या सभोवतालच्या वस्तु 3-Dआकारात आहेत. त्यास पाहुन आपण 2-D आकाराच्या 3-D आकाराची तुलना करु शकतो. भींतीवरील पोस्टर कडे पहा. त्याचा पृष्ठभाग आयतकार पाहिजे.त्यास किती मापे आहेत ? त्यात 2 मापे आहेत. लांबी आणि रुंदी आहे. पुस्तकांकडे पहा. पुस्तकाचा आकार कसा आहे ? तो घनाभा का सारखा आहे. त्यास 3 मापे आहेत. लांबी आणि रुंदी सोबत त्याला उंची पण आहे. त्रिकोण, चौरस, आयत या 2-D आकाराच्या साध्या आकृत्या आहेत. घन, घनाभ या घन वस्तु असुन 3-D आकारात आहेत.2-D वस्तुंना एकमेकांवर ठेवल्यास ते काही जागा व्यापतात. बाजुच्या आकृतीमान दाखविल्याप्रमाणे 3-Dवस्तुंच्या आकारात बनतात. त्यास घनफळ सुध्दा असते.

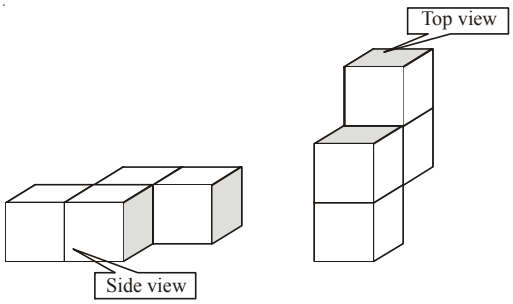


हे करा

1. काही 3-D वस्तुंची नांवे द्या.
2. काही 2-D वस्तुंची उदाहरणे द्या.
3. तुमच्या वहीत पतंगाचे चित्र काढा. तो 2-D आहे का 3-D ?
4. घन आणि घनाभाच्या आकारात असलेल्या काही वस्तु ओळखा.
5. वर्तुळ आणि गोलास किती माप असतात?

13.1 घनांनी बनलेल्या 3-D वस्तु

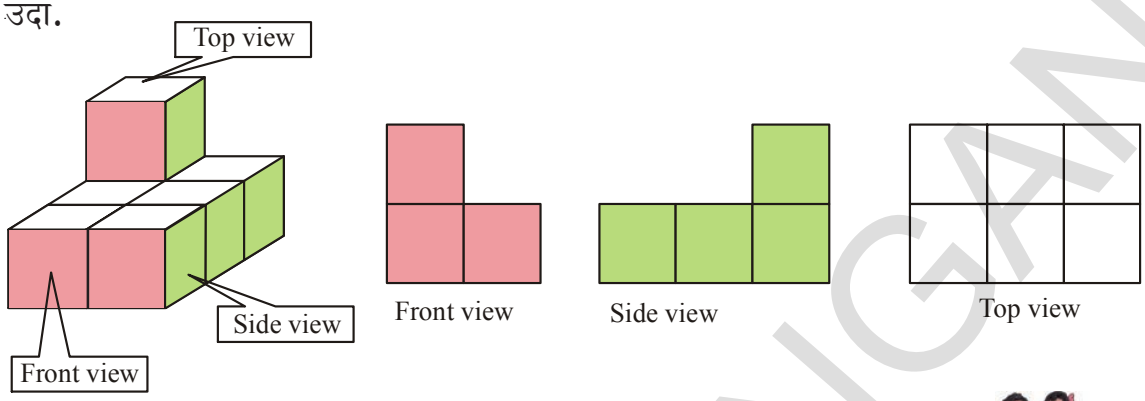
खालील घन आकृत्याचे निरिक्षण करा.
एक एकक प्रमाणाचे चार घन व्यवस्थित मांडल्यास दोन्ही आकृत्या तयार होतात.
त्यास वेगवेगळ्या बाजुने पाहिले असता ते वेगवेगळे दिसतात.



परंतु वस्तु सारखीच आसते.

SCERT TELANGANA

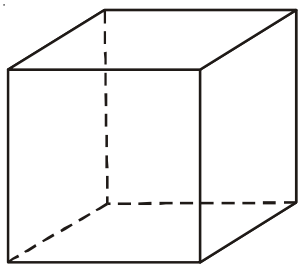
अशारितीने घन वस्तुंस वेगवेगळ्या दिशेने पाहिले असता ते वेगवेगळ्या आकारात दिसतात. उदा.



विचार करा आणि चर्चा करा.

वरील आकृतीत वरच्या दृष्याचे आणि खालच्या दृष्याचे क्षेत्रफळ आणि परिमीती कशी माहित कराल ?

13.2 3-D आकृतीला 2-D वर दर्शविणे

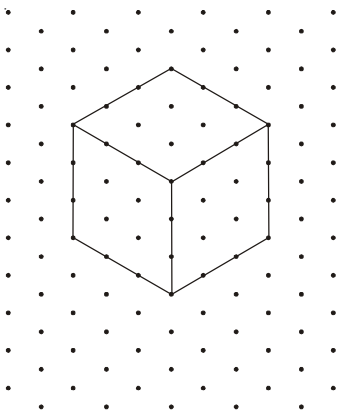


3-D आकृत्या काढण्यासाठी आपण कागदाच्या वापर करतो. जो 2-Dआहे.आपण कागदावर फक्त दोन आकारमान दर्शवु शकतो. तिसरे आकारमान फक्त आपली कल्पना आहे.

बाजुच्या आकृतीत 3-D घन आकृती दाखवुन सराव करीत आहे.

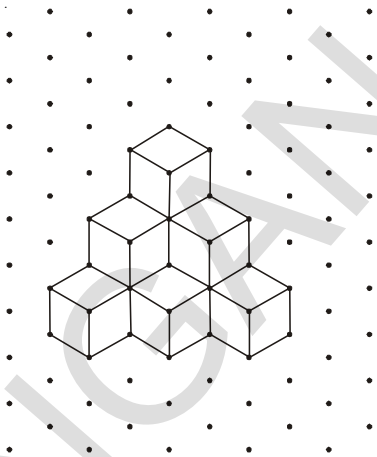
घनाच्या सर्व बाजु समान लांबीच्या आहेत. परंतु बाजुच्या आकृतीत त्या समान नाहीत . ती आपल्या मनाप्रमाणे काढली आहे.

हा प्रश्न सोडविण्यासाठी आपण आयसोमेट्रीक बिंदुचा कागद वापरतो. ज्यामध्ये आपण 3-D घन वस्तुंची खचित लांबी, रुंदी आणि उंची दर्शवु शकतो.



SCERT TELANGANA

उदाहरण 1 : बाजुच्या आकृतीत घनाची एकुण संख्या ओळखा

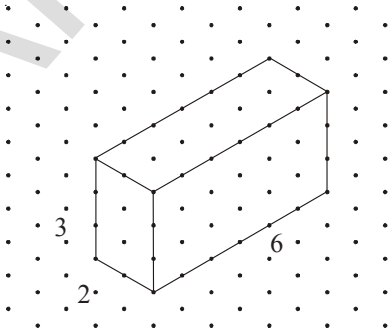


सोडवणुक : इथे घनाच्या तीन पातळ्या आहेत. वरच्या पातळीत फक्त एकच घन आहे. दुसऱ्या पातळीत 3 घन खालच्या पातळीत 6 घन आहेत. - 3 लपलेले आहेत.

म्हणुन एकुण घनाची संख्या $= 1 + 3 + 6 = 10$ घन

उदाहरण 2 : बाजुच्या आकृती मधील घनाभाचे माप काढा.

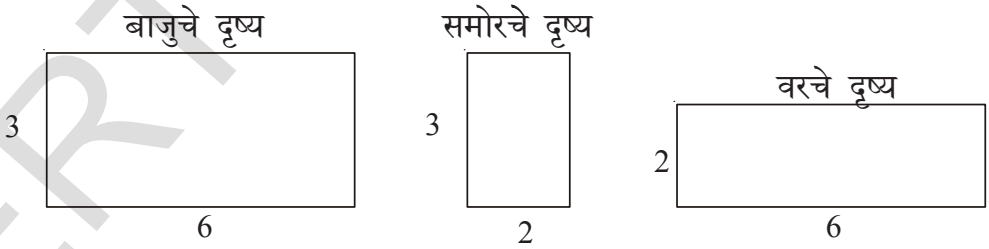
दोन क्रमवार बिंदु मधील अंतर 1 एकक घ्या. प्रमाणशिर मापं घेऊन बाजुचे दृष्य, समोरचे दृष्य आणि वरचे दृष्य सुध्दा काढा.



सोडवणुक : घनाभाची लांबी $l = 6$ एकक

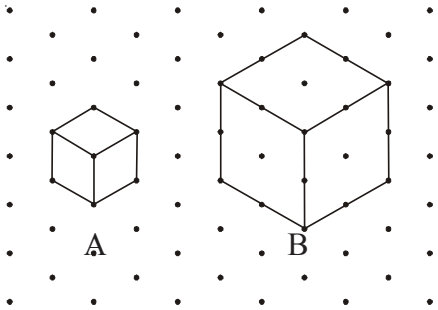
घनाभाची रुंदी $b = 2$ एकक

घनाभाची उंची $h = 3$ एकक



उदाहरण 3 : बाजुच्या आकृतीकडे पहा.

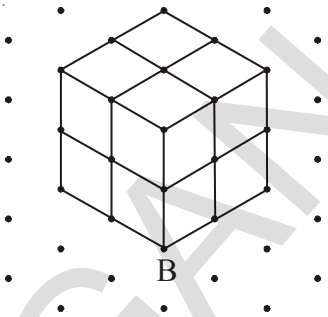
A आणि B घनात एक एकक प्रमाणाचे एकुण किती घन आहेत. आणि त्यांचे गुणोत्तर माहित करा.



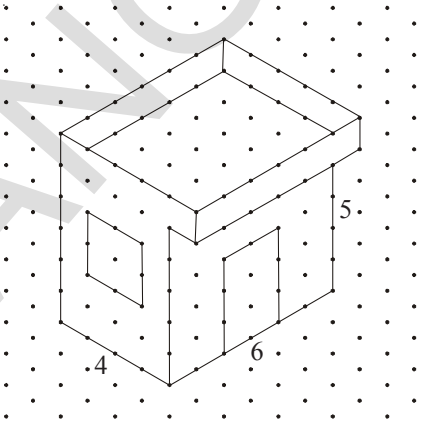
SCERT TELANGANA

सोडवणुक : येथे Aमध्ये फक्त एक एकक घन आहे. आकृती Bमध्ये प्रत्येक बाजुला समांतर रेषा काढा. एकक घनात विभागणी करा आणि मोजा इथे दोन पातळी आहेत. आणि प्रत्येक पातळीत 4 एकक घन आहेत. म्हणुन

B मधील एकुण घनांची संख्या 8 आहे. A आणि B मधील गुणोत्तर = 1 : 8.



उदाहरण 4 : बाजुच्या आकृतीत एका घराचा नकाशा आयसोमेट्रीक बिंदु च्या कागदावर काढलेला आहे. घराची लांबी, रुंदी आणि उंची मोजा. घराचे स्लॅब समोर आलेले आहे. स्लॅबचे क्षेत्रफळ काढा.



सोडवणुक : घराची लांबी = 6 एकक

घराची रुंदी = 4 एकक

घरांची उंची = 5 एकक

स्लॅब समोर वाढविलेले = 1 एकक

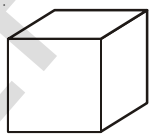
स्लॅबचे परिमाण =5 × 6 एकक

स्लॅबचे क्षेत्रफळ = 5 × 6 = 30 चौरस एकक

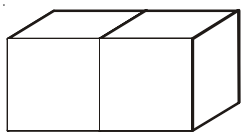
अभ्यास - 13.1

1. आयसोमेट्रीक बिंदुच्या कागदावर खालील 3-D आकृती काढा.

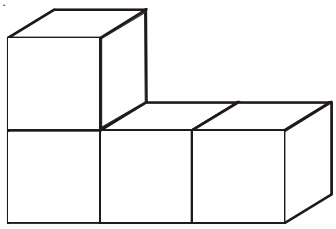
(i)



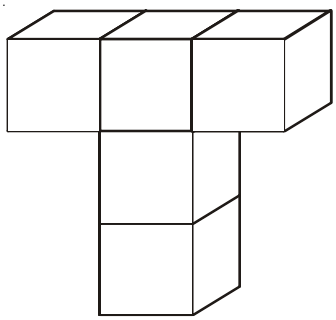
(ii)



(iii)



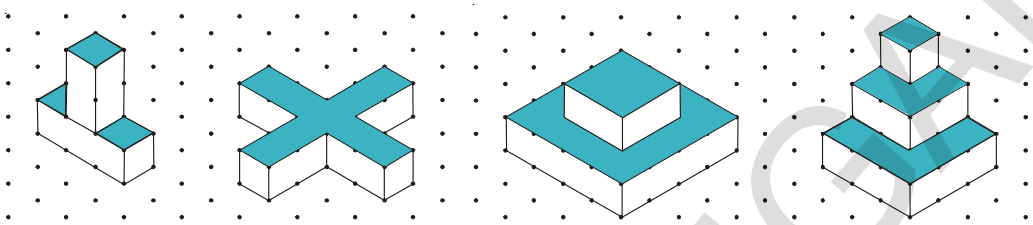
(iv)



SCERT TELANGANA

2. 5 एकक × 3 एकक × 2 एकक आकारमान असलेल्या घनाभास आयसोमेट्रीक बिंदुच्या कागदावर काढा.

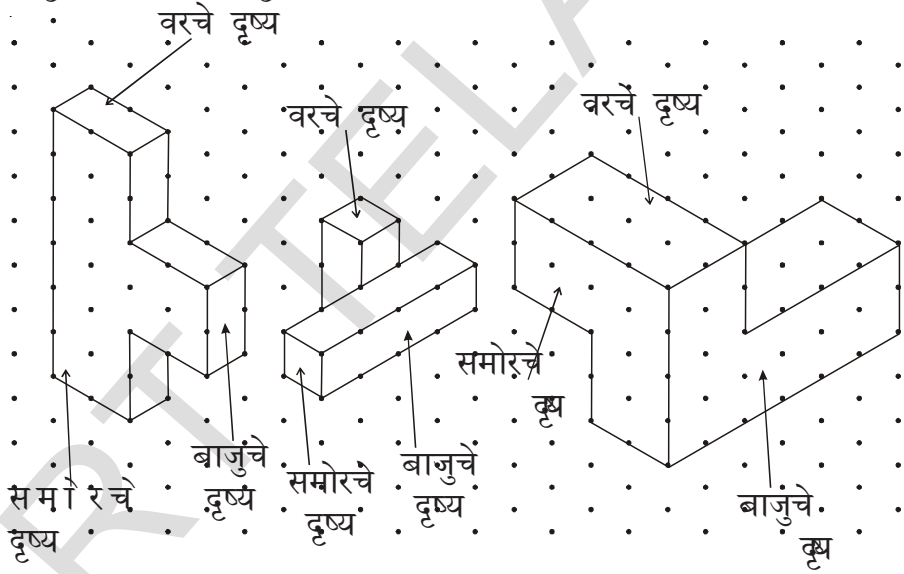
3. खालील 3-D आकृत्यामधील असलेल्या एकक घनाची संख्या काढा.



(i) (ii) (iii) (iv)

4. प्रश्न 3 मध्ये दिलेल्या 3-D आकारातील काळा केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.

5. दोन क्रमवार टिंबातील अंतर 1 सें.मी. घेऊन खालील 3-D आकृत्याचे समोरील दृष्य, बाजुचे दृष्य आणि वरचे दृष्य काढा.

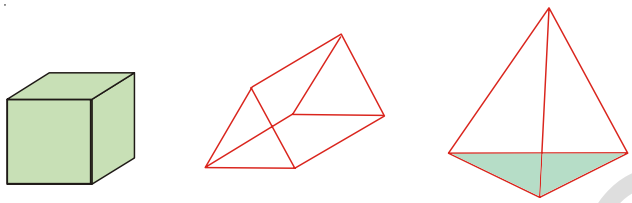


13.3 विविध भुमितीय घन

आपल्या आजुबाजुला आपण विविध घन पाहतो. त्यापैकी काही घन वस्तुला वक्रपृष्टभाग आणि काही घन वस्तुला सपाट पृष्टभाग असतो. डबा, पुस्तक, फासे या 3-D वस्तुंना सपाट पृष्टभाग असतो. चेंडु, नळी, इत्यादीस वक्र पृष्टभाग असते. या गुणधर्मावरुन 3-D आकरास बहुपृष्ठक आणि अबहुपृष्टक असे वर्गीकरण करु शकतो.

SCERT TELANGANA

खालील वस्तुंचे निरिक्षण करा.



वरील वस्तुं मध्ये काही वक्रपृष्ठ आहेत का ? नाही, या सर्वांना फक्त सपाट पृष्ठभाग आहे. अशाप्रकारच्या बहुकोणीय पृष्ठभाग असलेल्या घन वस्तुंना बहुपृष्ठक म्हणतात.

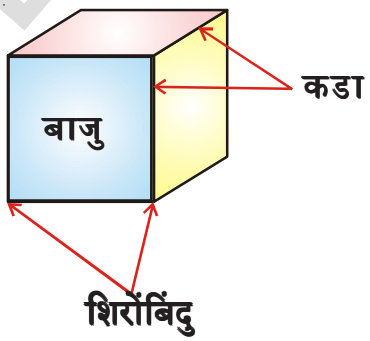
या वस्तुंना वक्रपृष्ठ भाग असतो. अशा प्रकारच्या घन वस्तुंना अबहुपृष्ठक असे म्हणतात.

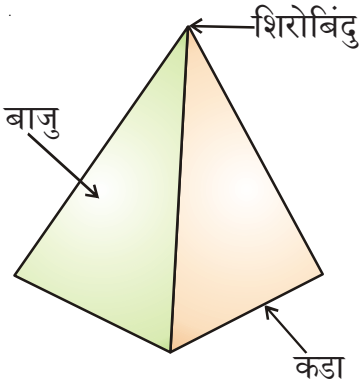
प्रयत्न करा.

1. बहुपृष्ठक असलेल्या तीन वस्तुची नावे द्या.
2. बहुपृष्ठक नसलेल्या तीन वस्तुची नावे द्या.

13.4 3D-वस्तुची बाजु, कडा आणि शिरोबिंदु

भींती, खिडक्या, दरवाजे, फरशी, छत, कोपरा, इत्यादी आपण राहत असलेल्या खोलीचे निरिक्षण करा आणि टेबल्स, डब्बे,इत्यादी पहा, त्यांच्या बाजु सपाट बाजु असतात. सपाट बाजु त्याच्या कडेवर मिळतात, दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त कडा कोपऱ्यात मिळतात. प्रत्येक कोपऱ्यास शिरोंबिंदु म्हणतात. एक घन घ्या. त्याच्या बाजु कुठे मिळतात त्याचे निरिक्षण करा ? त्याचे कडा कुठे मिळतात ?

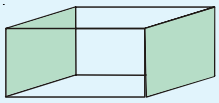


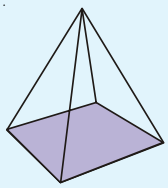


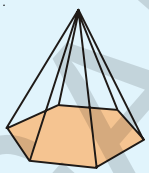
SCERT TELANGANA

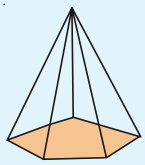
हे करा

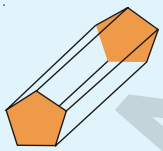
दिलेल्या आकृतीच्या बाजु, कडा आणि शिरोंबिंदु ओळखा

1. 

2. 

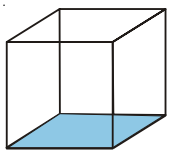
3. 

4. 

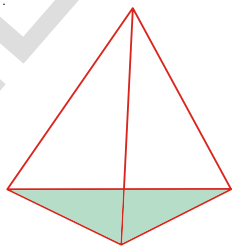
5. 

13.5 नियमीत बहुपृष्ठक

खालील आकृतीच्या बाजु,कडा आणि शिरोबिंदुचे निरिक्षण करा.



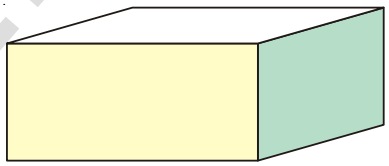
घन



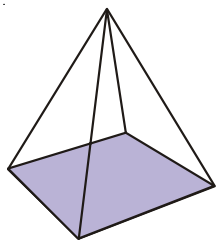
त्रिकोणीय पिरॅमिड

वरील दोन्ही वस्तुमधील सर्व बाजु एकरुप आहेत. त्यांच्या सर्व कडा आणि समान संख्येनी बनलेले शिरोबिंदु समान आहेत. अशा प्रकारच्या घन वस्तुंना नियमित बहुपृष्ठक म्हणतात.

आता, या आकृत्या पहा.



घनाभ



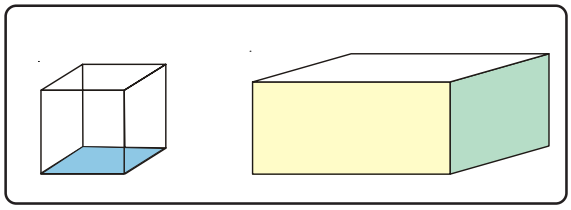
चौरसाकार पिरॅमिड

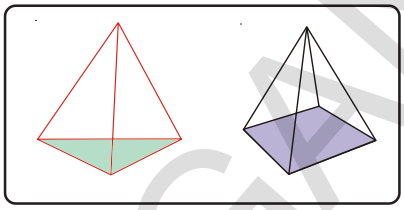
घनाभ ही बहुपृष्ठक नाही कारण त्याच्या सर्व बाजु एकरुप नाहीत, आणि चौरसाकार पिरॅमिड मध्ये एक शिरोबिंदु 4 कडांनी बनलेला आहे, आणि दुसरा शिरोबिंदु 3 कडांनी बनलेला आहे. पिरॅमिड मधील सर्व बाजु एकरुप नाहीत. हा सुध्दा नियमीत बहुपृष्ठक नाही. अशा प्रकारच्या वस्तुंना अनियमीत बहुपृष्ठक म्हणतात. अशा प्रकारे बहुपृष्ठकास नियमित बहुपृष्ठक आणि अनियमीत बहुपृष्ठक असे वर्गीकरण करता येते.

SCERT TELANGANA

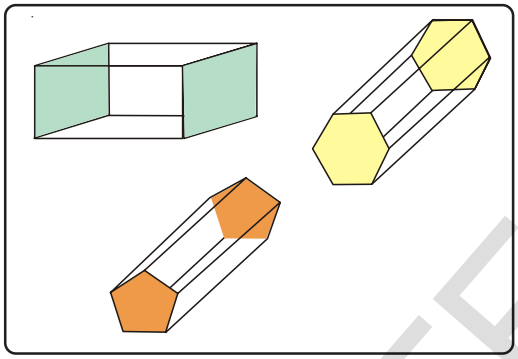
13.4.1 चिती आणि पिरॅमिड

आता खालील वस्तुंची पहाणी करा.

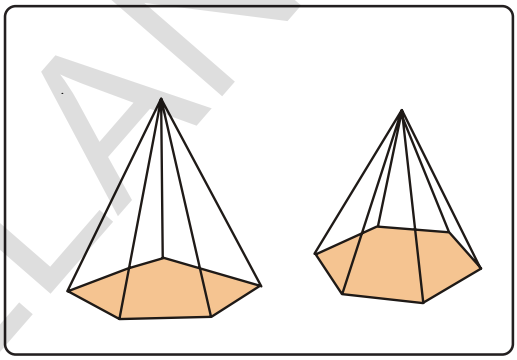




पहिल्या डब्यातील वस्तुंची वरची आणि खालची बाजु सारखी आहे. दुसऱ्या डब्यातील वस्तुंना पायाअसुन वर एक सामान्य शिरोबिंद आहे. अशा प्रकारच्या काही वस्तु पाहु या.



(a)



(b)

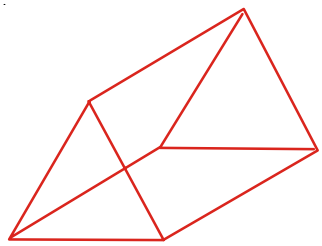
आकृती (a) मधील प्रत्येक वस्तुला दोन समांतर आणि एकरुप बहुभुज बाजु आहेत. आणि पार्श्व बाजु ही आयत (समांतर भुज चौकोन) आहे. आकृती (b) मध्ये पाया बहुभुज आहे आणि पार्श्वबाजु त्रिकोण आहेत. ते एका सामान्य शिरोबिंदु वर मिळतात.

घन वस्तु ज्यामध्ये दोन समांतर आणि एकरुप बहुभुज बाजु, आणि पार्श्व बाजु आयताकार , किंवा समांतरभुज चौकोनाकारात असतात. त्यास चिती म्हणतात.

घन वस्तु ज्याचा पाया बहुभुज असुन आणित्याच्या पार्श्वबाजु त्रिकोणाकार बाजु आहेत. याला पिरॅमिड म्हणतात.

चिती किंवा पिरॅमिड हे नाव, त्याच्या समांतर आणि एकरुप बहुभुज बाजुवरुन किंवा पाया वरुन देण्यात आले.

A. त्रिकोणाकार चिती



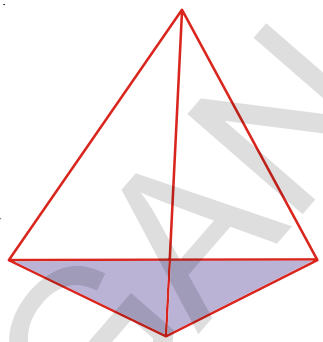
बाजुच्या आकृतीत दोन एकरुप आणि समांतर बाजुचा आकार कसा आहे ? आणि त्याच्या पार्श्व बाजुच्या आकार कसा आहे ? त्याच्या दोन एकरुप आणि समांतर बाजु त्रिकोणाकार असतात. आणि त्याच्या पार्श्व बाजु समांतर भुज चौकोन आहेत. यालाच त्रिकोणाकार चिती असे म्हणतात.

जर पाया चौरसाकार असल्यास त्यास चौरस चिती म्हणतात.

जर पया पंचभुज असल्यास त्यास पंचभुजीय चिती म्हणतात.

SCERT TELANGANA

B. त्रिकोणीय पिरॅमिड

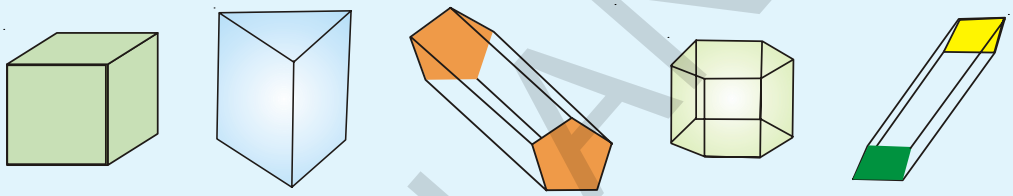


ज्या पिरॅमिडचा पाया त्रिकोण असते. त्यास त्रिकोणीय पिरॅमिड म्हणतात.

याला चतु:पृष्ठक असे म्हणतात. (चार बाजु असलेल्या)
जर पिरॅमिड चा पाया चौरस असेल तर त्यास चौरस पिरॅमिड म्हणतात.
जर पिरॅमिड पाया पंच भुजी असल्यास त्यास पंचभुजीय पिरॅमिड म्हणतात.

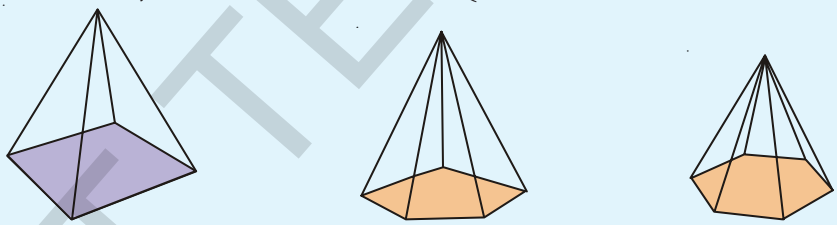
हे करा

1. खालील दिलेल्या चितीची नावे लिहा.



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. खालील दिलेल्या पिरॅमिडची नावे लिहा.



(i) (ii) (iii)

3. खालील तक्ता भरा :

पायाच्या एकुण बाजुची संख्या	चितीचे नाव	पिरॅमिडचे नांव
चिती / पिरॅमिड		
3 बाजु		
4 बाजु		
5 बाजु		
6 बाजु		
8 बाजु		

4. चिती आणि पिरॉमिड मधील फरक स्पष्ट करा.

SCERT TELANGANA

विचार करा, चर्चा करा लिहा

जर नियमीत पिरॅमिडच्या बहुभुजीय पायाच्या बाजुंची संख्या अमार्याद वाढल्यास पिरॅमिड आकार कसा होईल ?

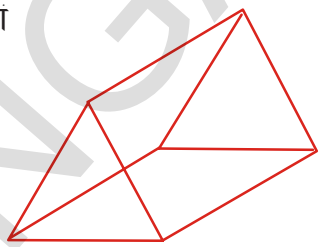
13.6 बहुपृष्ठाकाच्या कडांची संख्या, बाजु आणि शिरोबिंदु

बहुपृष्ठाकाच्या बाजुंची, कडांची आणि शिरोबिंदुची मोजणी करु या

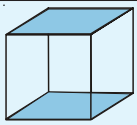
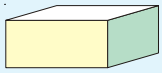
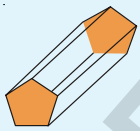
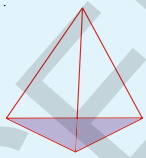
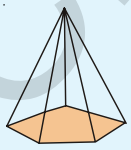
बाजुंची संख्या = 5 बाजु

कडांची संख्या = 9 कडा

शिरोबिंदुची संख्या= 6 शिरोबिंदु



निरिक्षण करा आणि तक्ता पुर्ण करा

वस्तुंची आकृती	आकृतीचे नांव	बाजुची संख्या (F)	शिरोबिंदुची संख्या(V)	कडांची संख्या संख्या (E)	F+V	E+2
	घन	6	8	12	6 + 8 = 14	12 + 2 = 14
	घनाभ					
	पंचभुजीय चिती					
	त्रिकोणीय पिरॅमिड					
	पंचभुजी पिरॅमिड					

वरील तक्त्यातील शेवटचे दोन स्तंभ पाहिल्यास आपण निश्कर्ष काढु शकतो की

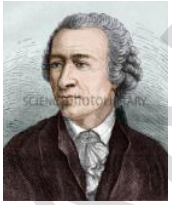
F + V = E + 2 सर्व बहुपृष्ठकासाठी

SCERT TELANGANA

या सबंधाचे पहिल्यांदा निरिक्षण गणितशास्त्रज्ञ Leonhard Euler (आयलर असा उच्चार काढा.) नी केले

ते म्हणाले की, $\mathbf{F + V = E + 2}$ या संबंधाला बहुपृष्ठकाचे

" **आयलर संबंध**" म्हणतात

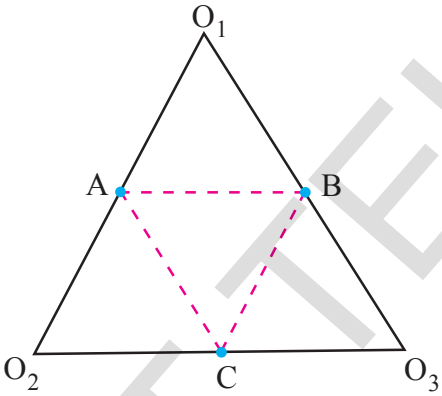


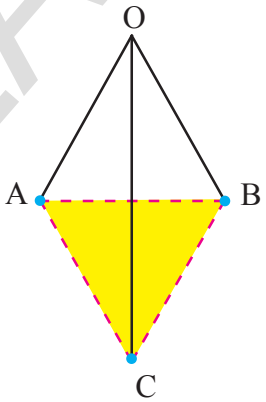
Leonhard Euler
(1707-1783)

13.7 जाळीच्या आकृत्या

जाळी ही सापळ्यांचा 2-D मधील एक प्रकार आहे. जेव्हा त्या घडी करतात त्या 3-D आकारात येतात. जाळीच्या आकृतीचा वापर करुन आपण चिती, पिरॅमिड बनवु शकतो. त्रिकोणीय चिती बनविण्यासाठी खालील दिलेली कृती पहा.

कागदाचा एक तुकडा घ्या आणि त्यास त्रिकोणाच्या आकारात कापा. त्याच्या शिरोबिंदुस O_1, O_2, O_3 ची खुण करा आणि त्याच्यसा मध्यबिंदु A, B, C ओळखा.



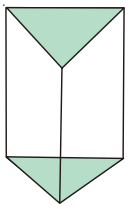


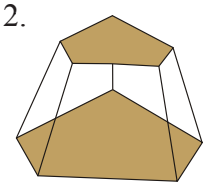
कागदाची घडी तुटक रेषा AB, BC, CA रेषेवरुन करा आणि O_1, O_2, O_3 हे 0 ला मिळेपर्यंत त्या घडीला वाढवा. यावरुन AO_1 ही AO_2 शि तंतोतंत जुळते BO_1 ही BO_3 ला तंतोतंत जुळते आणि CO_2 हि CO_3 ल्या तंतोतंत जुळते. अशा प्रकारे तया र झालेली वस्तु पिरॅमिड आहे.

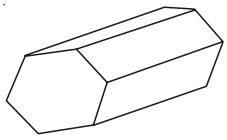
O_1, O_2, O_3 ही पिरॅमिड जाळीची आकृती आहे.

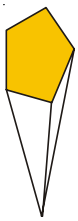
अभ्यास - 13.2

1. बहुपृष्ठाच्या एकुण बाजु, शिरोबिंदु आणि कडा मोजा आणि आयलर चे सुत्र तपासुन पहा.

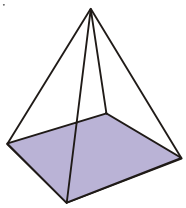
1.


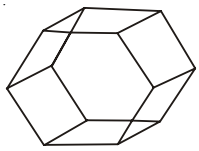
2.


3.


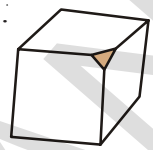
4.


SCERT TELANGANA

5. 

6. 

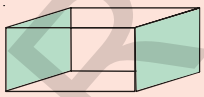
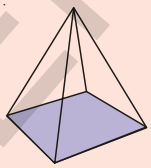
7.

8. 

2. चौरस चिती आणि घन सारखे आहेत का ? स्पष्ट करा.
3. बहुपृष्ठाकास फक्त तिन त्रिकोणीय बाजु का असतात ? स्पष्ट करा.
4. बहुपृष्ठाकास फक्त 4 त्रिकोणीय बाजु का असतात ? स्पष्ट करा.
5. आयलर सुत्राचा उपयोग करुन तक्ता पुर्ण करा.

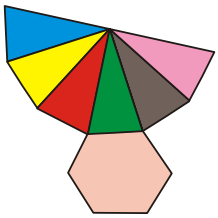
F	8	5	?
V	6	?	12
E	?	9	30

6. बहुपृष्ठाकास 10 बाजु, 20 कडा आणि 15 शिरोबिंदु असते का ?
7. खालील तक्ता पुर्ण करा

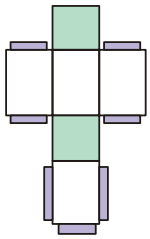
वस्तु	शिरोबिंदुची एकुण संख्या	कडांची एकुण संख्या
		
		

SCERT TELANGANA

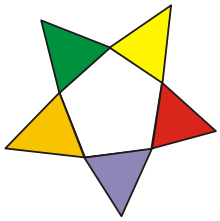
8. खालील जाळ्यावरुन तयार झालेल्या 3-D वस्तुंना किंवा आकारास नावे द्या.



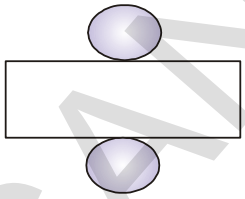
(i)



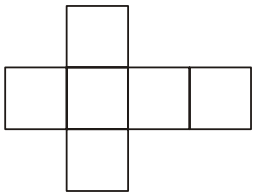
(ii)



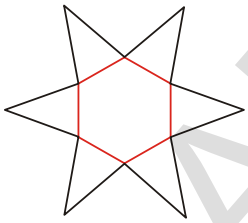
(iii)



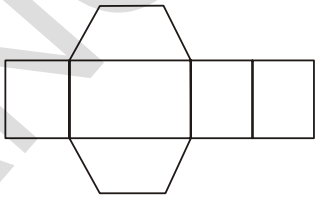
(iv)



(v)



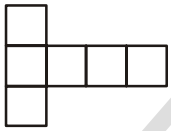
(vi)



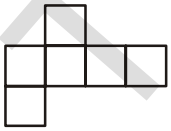
(vii)

9. खालील आकृत्या डब्याच्या वहीत काढुन त्यापैकी खालील पैकी कोणत्या घन बनतात माहित करा. ?

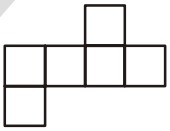
(i)



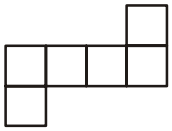
(a)



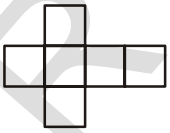
(b)



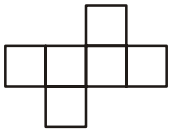
(c)



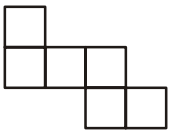
(d)



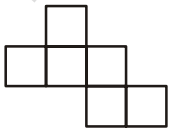
(e)



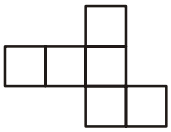
(f)



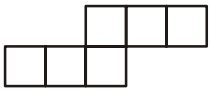
(g)



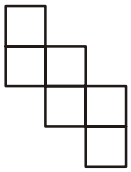
(h)



(i)



(j)



(k)

SCERT TELANGANA

(ii). खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) चार शिरोबिंदु आणि चार बाजु असलेल्या बहुपृष्ठकास नाव द्या ?

(b) शिरोंबिंदु नसलेल्या घन वस्तुला नाव द्या ?

(c) 12 कडा असलेल्या बहुपृष्ठकास नावे द्या ?

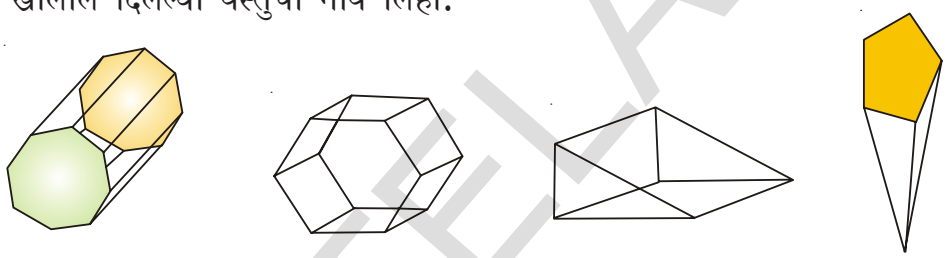
(d) एकच पृष्ठभाग असलेल्या घन वस्तुला नावे द्या ?

(e) घन हा घनाभापासुन कसा वेगळा आहे ?

(f) कोणत्या दोन आकारास, सारख्या कडा, शिरोंबिंदु आणि सारख्या बाजु असतात ?

(g) 5 शिरोबिंदु आणि 5 बाजु असलेल्या बहुपृष्ठाकास नाव द्या ?

(iii). खालील दिलेल्या वस्तुंची नावे लिहा.



(a) (b) (c) (d)

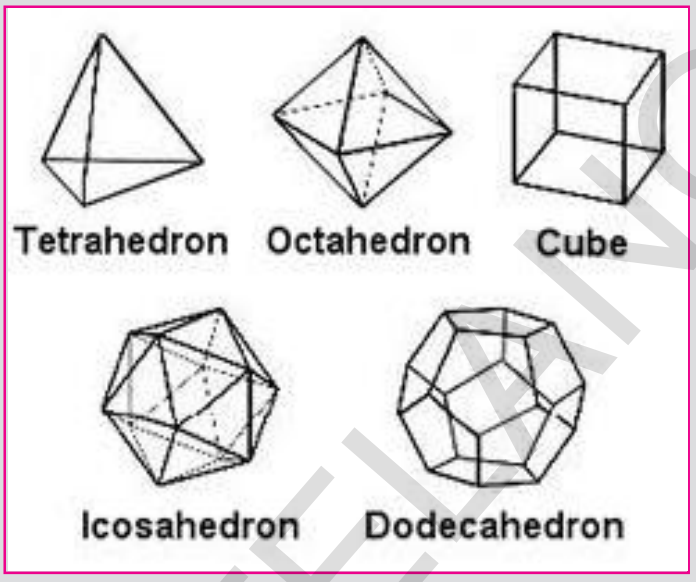
आपण काय चर्चा केली ?

1. बिंदु आलेखाच्या कागदावर 3-D वस्तुंना कसे काढतात
2. 3-D आकाराचे तिन दृष्य, वरचे दृष्य, बाजुचे दृष्य आणि समोरचे दृष्य
3. बहुपृष्ठक : घन वस्तुंना सपाट पृष्टभाग असतो.
4. चिती : बहुपृष्टात वरचा भाग आणि पाया समान बहुभुजी असतो. आणि इतर बाजु आयताकार (समांतर भुज) असतात.
5. पिरॅमिड : बहुपृष्टाकास बहुभुजी हा पाया आणि आधार शिरोबिंदु असुन उरलेल्या बाजु त्रिकोण असतात.
6. 2-D जाळ्यावरुन 3-D वस्तु बनवु शकतात.
7. बहुपृष्ठाकाचे आयलर सुत्र $E + 2 = F + V$.

SCERT TELANGANA

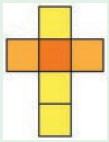
तुम्हाला माहित आहे का ?

येथे फक्त पाच नियमित बहुपृष्ठाके आहेत. ते सर्व गुंतागुंतीचे ज्यास अव्यवहार्य म्हणतात. घन जी प्लाटोची स्तुतीसुमने आहेत.



फक्त घन हीच पुर्ण जागा भरलेली बहुभुजी आहे.

प्लॅटोनिक घन जाळीच्या आकृत्या

बहुपृष्ठकाचे नांव	बहुभुजी बाजु	जाळीची आकृती
चतुर्भुज बहुपृष्ठक	4 त्रिकोन	
अष्टपृष्ठक	8 त्रिकोन	
घन	6 चौरस	
आयकोसाहेड्रोन	20 त्रिकोन	
डोडेकाहेड्रोन	12 पंचभुजी	

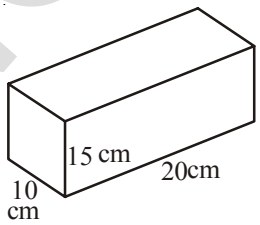
SCERT TELANGANA

धडा 14

पृष्टफळ आणि घनफळ
(घन आणि दिर्घघन)

14.0 प्रस्तवाना

सुरेशला त्याने आणलेल्या भेटवस्तु रंगीत कागदाने सजवायचे आहे. त्याच्या एका मित्राने त्याला 100 से.मी.^{2} पेपर विकत घ्यायचा सल्ला दिला. दुसऱ्या मित्राने 200 सें.मी.^{2} पेपर विकत घ्यायचा सल्ला दिला. कुणाचा सल्ला बरोबर आहे?पेपर किती विकत घ्यायचा हे सुरेशला कसे कळेल.

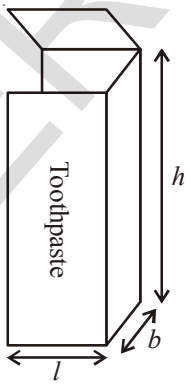


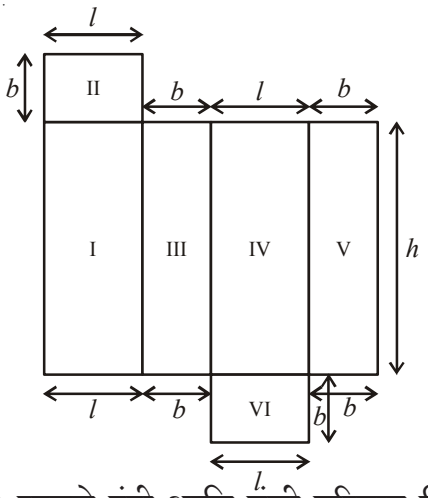
पेपर किती लागतो हे भेटवस्तुच्या डब्ब्याच्या पृष्ट फळावर आधारीत आहे.

अशा परिस्थितीत वस्तुचे पृष्ट फळ माहित करण्यासाठी आपणच आपली मदत करुन घेऊ या.

14.1 दिर्घघन/ इष्टीकाचीती /घनाभ

एक दिर्घघन आकाराचा घटट कागदाचा डबा घ्या.जसे टुथपेस्ट चा डब्बा. खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे त्या डब्याला कातरुन उघडा आणि त्याचा बाजुचे आकार पहा. सारख्या आकाराचे किती पृष्ट दिसतील पहा ?





आकृती पाहिल्यास इर्थ 'l', म्हणजे लांबी 'b', म्हणजे रुंदी आणि उंची परिमान दिसतील. तीन समान बाजुच्या जोड्या दिसतील.

SCERT TELANGANA

म्हणुन, दिर्घघनाचे एकुण पृष्टफळ

क्षेत्रफळ I + क्षेत्रफळ II + क्षेत्रफळ III + क्षेत्रफळ IV + क्षेत्रफळ V + क्षेत्रफळ VI

$= h \times l + l \times b + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

म्हणुन एकुण पृष्टफळ $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l)$

$= 2\,(lb + bh + hl)$

सुरेशच्या भेटवस्तुच्या डब्याची उंची,लांबी, आणि रुंदी अनुक्रमे 20 सें.मी., 10 सें.मी., आणि 15 सें.मी. आहे.

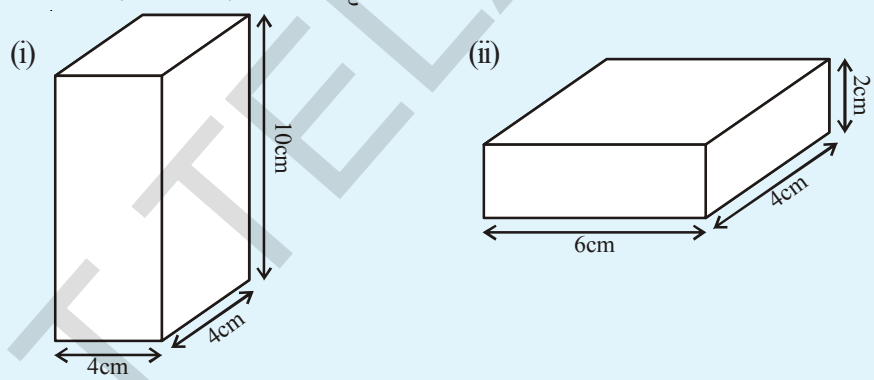
तेव्हा डब्याचे एकुण बाह्य पृष्टफळ $= 2(20 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20)$

$= 2\,(200 + 150 + 300)$

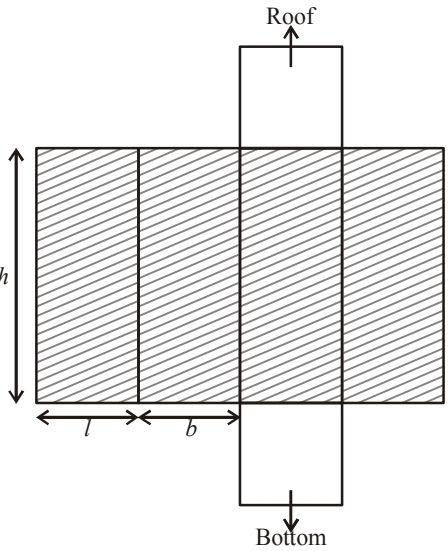
$= 2\,(650) = 1300$ से.मी.^{2}

हे करा.

1. खालील दिलेल्या दिर्घघनाचे पृष्टफळ काढा.



14.1.2 दिर्घघनाच्या बाजुंचे पृष्ठफळ



- दिर्घघनाच्या बाजुचे एकुण पृष्ठफळ म्हणजे दिर्घघनाच्या चार बाजुंच्या पृष्ठफळाची बेरीज होय(वरचा आणि खालचा पृष्ठभाग सोडुन) उदा. आपण बसतो त्या दिर्घघनाकृती वर्गाच्या चार भिंतीचे एकुण पृष्ठफळ म्हणजेच त्या वर्गाच्या बाजुंचे एकुण एकुण पृष्ठफळ आहे.

  एकुण दिर्घघनाच्या बाजुंचे क्षेत्रफळ

  $= l \times h + b \times h + l \times h + b \times h$

  $= 2lh + 2bh$

  $= 2h\,(l + b)$

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करा.

(i) एक दिर्घघन आकाराचे डस्टर (ज्याला वर्गात शिक्षक वापरता.). घेऊन मोजपट्टीने त्याच्या बाजु मोजुन त्याचे एकुण पृष्टफळ काढा.

(ii) त्या डस्टरला ग्राफ पेपरमध्ये गुंडाळा ग्राफ वरील चौरस मोजुन तुम्ही काढलेलल्या पृष्टफळाशी तुलना करा.

(ii) तुमच्या वर्गाची उंची, रूंदी, लांबी मोजुन घ्या आणि

(a) खिडकी व दाराचे पृष्टफळ दुर्लक्ष करुन चौरस खोलीचे एकुण पृष्टफळ काढा.

(b) चौरस खोलीच्या बाजुच्या भिंतीचे पृष्टफळ काढा.

(c) चौरस खोलीला चुना मारलेल्या भागाचे एकुण पृष्टफळ काढा.

विचार करा, चर्चा करा

1. दिर्घघनाचे एकुण पृष्टफळ = बाजुचे क्षेत्रफळ + 2 × पायाचे क्षेत्रफळ असे म्हणता येईल

2. आपण जर दिर्घघनाची स्थिती आकृती - 1 पासुन आकृती - 2 सारखी बदलली बाजुचे पृष्टफळ सारखे होते काय ?

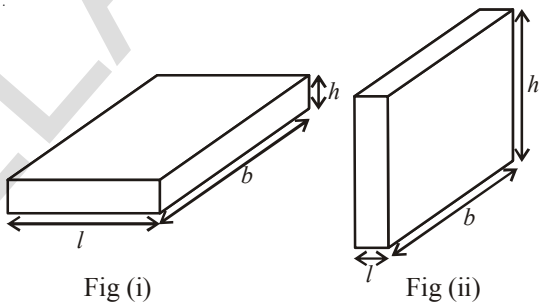


Fig (i) Fig (ii)

3. परिमान समान असलेल्या ($l = b = h$) दिर्घघनाची आकृती काढा आणि दिर्घघनाचे एकुण पृष्टफळ काढण्याचे सुत्र व बाजुंचे पृष्टफळ काढण्याचे सुत्र तयार करा.

14.2 घन

खालील आकृती एक मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ग्राफ पेपर वर रेखाचित्र काढा आणि त्याप्रमाणे कापा, आणि रेषे प्रमाणे दुमडा आकृती (2) व (3)प्रमाणे कडा चिटकवा कसा आकार तयार होईल ? त्या आकाराच्या बाजु आणि आकारमान पहा.

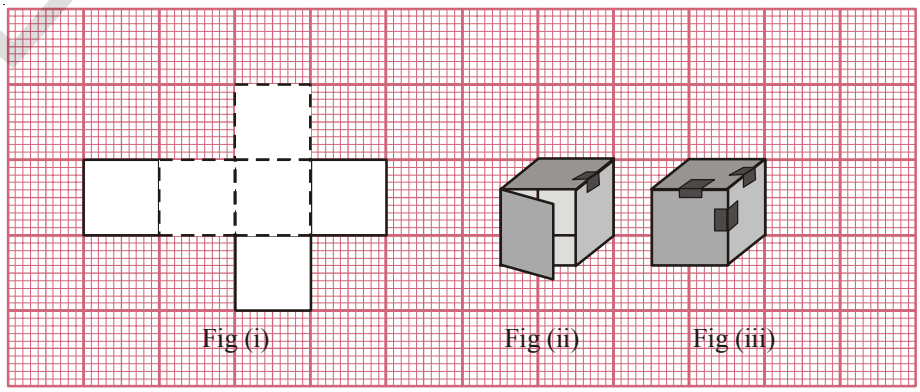
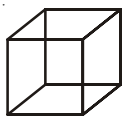


Fig (i) Fig (ii) Fig (iii)

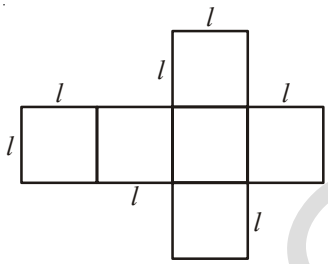
SCERT TELANGANA

अशा प्रकारे तयार झालेला घन आणि जाळे चित्राचे निरिक्षण करा.

आकृती (iv) आणि (v)ला पहा घनाच्या सर्व बाजुचा आकार वर्ग आहे का ? घनाची उंची, लांबी, रुंदी सारख्या आसतात काय ?



(iv)

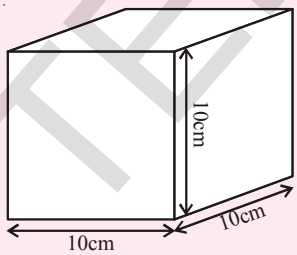


(v)

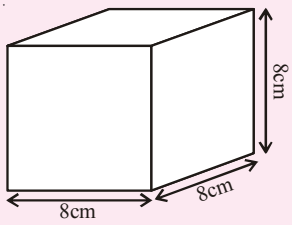
(a) घनाला किती बाजु असतात ? घनाच्या सर्व बाजु समान असतात काय ?
(b) जर घनाची प्रत्येक बाजु *l* असेल तर प्रत्येक बाजुचे क्षेत्रफळ किती असेल? (आकृती. v)
(c) घनाचे एकुण पृष्टफळ किती
(d) घनाच्या बाजुचे - वरची व तळ बाजु सोडुन पृष्टफळ किती ?

प्रयत्न करा

(i) खालील 'A' घनाचे पृष्टफळ काढा आणि 'B' घनाचे बाजूंचे पृष्टफळ काढा.

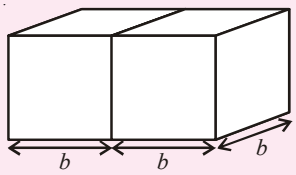


A

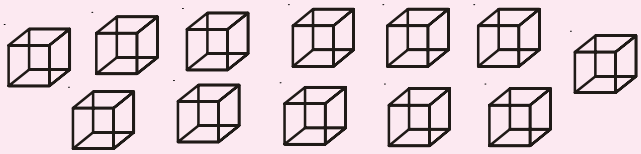


B

(ii) 'b' बाजु असलेले दोन घन जोडुन बाजुला दाखविलेल्या आकृतीप्रमाणे दिर्घघन तयार करा. व त्याचा एकुण पृष्टफळ काढु शकता का ?



(iii) सारख्या आकाराचे बारा घन कशा प्रकारे मांडल्यास कमीत कमी पृष्टफळाचा दिर्घघन तयार होईल ?



(iv) $4 \times 4 \times 4$ आकारमान असलेल्या घनाच्या पृष्टफळाला रंग दिला. त्या घनाला 64 समान भागात कापले तर (a) कितीना 1 बाजुला रंग दिला गेला ? (b) कितीच्या दोन बाजुला रंग दिला ? (c) 3बाजुना रंग दिला ? (d) किती बाजुंना रंग दिला नाही ?

SCERT TELANGANA

उदाहरण 1: लांबी, रुंदी, उंची अनुक्रमे 15 सें.मी., 12 सें.मी., 10 सें.मी. असलेल्या दिर्घघनाचे एकुण पृष्टफळ माहित करा.

सोडवणुक: दिर्घघनाची लांबी (l) = 15सें.मी.

दिर्घघनाची रुंदी (b) = 12सें.मी.

दिर्घघनाची उंची (h) = 10सें.मी.

दिर्घघनाची एकुण पृष्टफळ = $2(lb + bh + hl)$

= $2(15 \times 12 + 12 \times 10 + 10 \times 15)$ सें.मी.^{2}

= $2(180 + 120 + 150)$ सें.मी.^{2}

= $2(450)$ सें.मी.^{2}

= 900 सें.मी.^{2}

उदाहरण 2 : जर घनाची प्रत्येक कडा दुप्पट केली तर घनाचे पृष्टफळ किती पट वाढते ?

सोडवणुक: समजा घनाची कडा x आहे.

कडा दुप्पट केल्यास नव्या घनाची कडा = $2x$

दिलेल्या मुळ घनाचा पृष्टफळ = $6x^2$

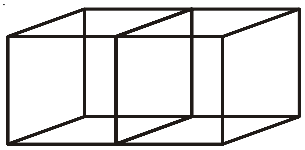
नव्या घनाचे पृष्टफळ दुप्पट केल्यास = $6(2x)^2 = 24x^2 = 4 \times 6 \times x^2$

कडा दुप्पट केल्यावर मुळ घनाचे पृष्टफळ = 4× मुळ घनाचे पृष्टफळ

म्हणुन, नव्या घनाचे पृष्टफळ मुळ घनाच्या 4 पट होते.

उदाहरण 3: दोन 6 सें.मी. बाजु असलेले दोन घन जोडले अशा प्रकारे तयार झालेल्या दिर्घघनाचे पृष्टफळ माहित करा.

सोडवणुक: बाजुच्या आकृतीला पहा, दोन घन जोडल्यावर तयार झालेल्या दिर्घघनाला 6 बाजु आहेत, दोन बाजु दिसत नाहीत.कारण काय ?



म्हणुन, 12 – 2 = 10 वर्ग बाजु शिल्लक राहिल्या $10 \times l^2$ सें.मी.^{2}

याप्रमाणे दिर्घघनाचे एकुण पृष्टफळ = $10 \times (6)^2$मी^{2}

= 10×36सें.मी.^{2} = 360सें.मी.^{2}

SCERT TELANGANA

पर्यायी पध्दत

6 सें.मी. च्या कडा असलेले दोन घन जोडल्यास दिर्घघनाचा आकार तयार होतो. त्यांची लांबी, रुंदी आणि उंची अनुक्रमे (6 + 6) सें.मी.आणि , 6सें.मी. आणि 6सें.मी.म्हणजेच12 सें.मी., 6सें.मी.आणि 6सें.मी.अशा प्रकारे दिर्घघनाचे पृष्टफळ

$= 2\,(lb + bh + lh)$

$= 2\,(12 \times 6 + 6 \times 6 + 12 \times 6)$ सें.मी.^{2}

$= 2\,(72 + 36 + 72)$ सें.मी.^{2}

$= 2 \times 180$ सें.मी.^{2}

$= 360$ सें.मी.^{2}

उदाहरण 4: 60 सें.मी. लांब, 40 सें.मी. रुंद आणि 30 सें.मी. उंच असलेल्या डब्याच्या बाहेरच्या भागाला रंगवायचे आहे. प्रत्येक 20सें.मी.^{2} रंग मारायला 50 पैसे लागतात तर बाहेरच्या भागाला रंग करायला किती रुपये लागतील.

सोडवणुक: डब्याची लांबी (l) = 60 सें.मी.

डब्याची रुंदी (b) = 40 सें.मी.

डब्याची उंची (h) = 30 सें.मी.

डब्याची एकुण पृष्टफळ $= 2\,(lb + bh + hl)$

$= 2\,(60 \times 40 + 40 \times 30 + 60 \times 30)$ सें.मी.^{2}

$= 2(2400 + 1200 + 1800)$ सें.मी.^{2}

$= 2 \times 5400$ सें.मी.^{2}

$= 10800$ सें.मी.^{2}

20 सें.मी.^{2} पृष्टाला रंगवायची किंमत = 50 पैसे = ₹ $\frac{50}{100}$ रुपये

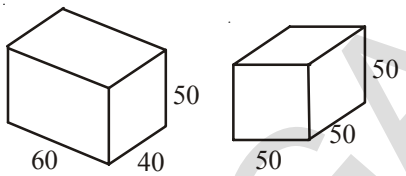
$\therefore$ 1 सें.मी.^{2} = ₹ $\frac{50}{100} \times \frac{1}{20}$ रुपये

$\therefore$ 10800 सें.मी.^{2} = ₹ $\frac{50}{100} \times \frac{1}{20} \times 10{,}800$ = ₹ 270रुपये

SCERT TELANGANA

अभ्यास -14.1

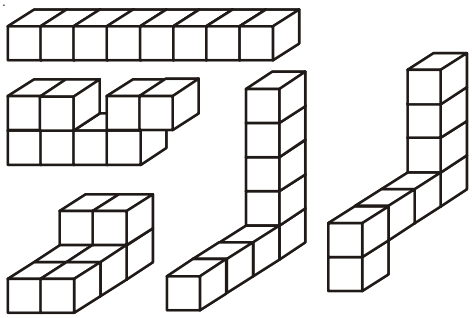
1. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दोन दिर्घघनाकृती डबे आहेत त्यापैकी कोणत्या डब्याला बनविण्यासाठी कमी सामान लागेल ?



2. 600 सें.मी.^{2} पृष्टफळ असलेल्या घनाची बाजु माहित करा.
3. प्रमिलाने 1मी × 2मी × 1.5मी. माप असलेल्या कपाटाला रंगविली तीने कपाटाची खालची बाजु रंगविली नाही तर तिने रंगविलेले एकुण पृष्टफळ किती ?
4. 20सें.मी. × 15सें.मी. × 12 सें.मी. परिमाण असलेल्या दिर्घघनाला 5 पैसे चौरस सें.मी. भावाने रंगवायला किती खर्च येईल हे सांगा.

14.3 घनाचे व दिर्घघनाचे घनफळ

त्रिमीतीय आकाराच्या वस्तुने व्यापलेल्या जागेला घनफळ म्हणतात. तुमच्या सभोवतालच्या वस्तुच्या घनफळाची तुलना जास्त आहे. खोलीचे घनफळ कपाटाच्या घनफळपेक्षा जास्त आहे. तसेच तुमच्या पेन्सील बॉक्स घनफळ त्यात ठेवलेल्या पेन्सीली व खोडरबरा च्या घनफळापेक्षा जास्त असते तुम्ही यापैकी कोणत्यातरी वस्तुचे घनफळ मोजलात काय ?



हे लक्षात ठेवा कि, क्षेत्रफळ माहित करण्यासाठी आपण चौरस एककाचा वापर करतो. पण घनफळ कसे माहित करतात. इथे आपण घनफळ मोजण्यासाठी घन एकक वापरतो. हा घन सोईस्कर आकार आहे (ज्याप्रमाणे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी चौरस हा सोईस्कर आकार आहे) एखाद्या जागेचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी आपण जागेला चौरस एककात विभागणी करतो. त्याच प्रमाण घनफळ माहित करण्यासाठी जागेला घन एककात विभागतो. घन एकक हा एकक लांबीचा घन आहे. वरील आकृतीत विभागतो. घन एकक हा एकक लांबीचा घन आहे.वरील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे लक्षात ठेवा कि प्रत्येक घन आकार हा 8 घन एककाने बनला आहे.

1 घन सें.मी. = 1 सें.मी. × 1 सें.मी. × 1 सें.मी. = 1 सें.मी.^{3}

= 10 मी.मी. × 10 मी.मी. × 10 मी.मी. = ... मी.मी.^{3}

1 घन मीटर = 1 मी. × 1 मी. × 1 मी. = 1 मी.^{3}

= 100 सें.मी. × 100सें.मी. × 100सें.मी. = ... सें.मी.^{3}

1 घन मिली मिटर = 1 मी.मी. × 1 मी.मी. × 1 मी.मी. = 1 मी.मी.^{3}

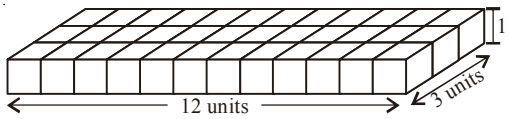
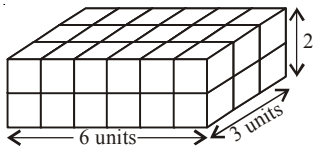
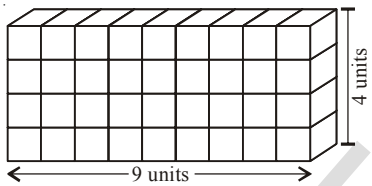
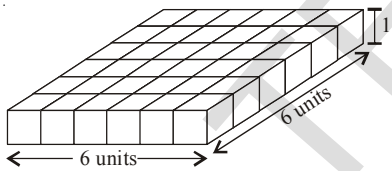
= 0.1 सें.मी. × 0.1 सें.मी. × 0.1 सें.मी. = ... सें.मी.^{3}

SCERT TELANGANA

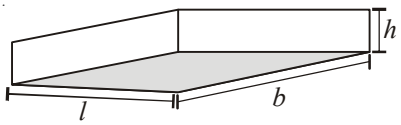
14.3.1 दिर्घघनाचे घनफळ:

सारख्या आकाराचे 36 घन घ्या (म्हणजे घनाची प्रत्येक बाजु सारखी आहे.) त्यांना दिर्घघनाच्या आकारात वेगवेगळ्या प्रकारे मांडणी करा.

खालील तक्ता बघुन रिकाम्या जागा भरा.

	दिर्घघन	लांबी	रुंदी	उंची	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

वरील तक्त्यात तुम्हाला काय आढळते ? दिर्घघनाचा परिणाम व घनफळ यात काही संबंध आहे काय ?

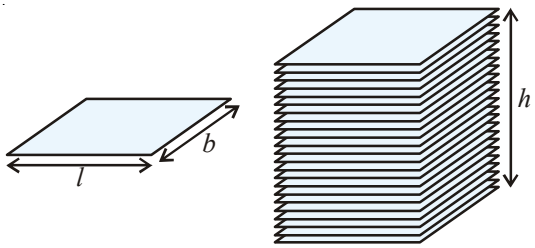


आपण वरील संदर्भात एकुण 36 वापरुन दिर्घघन तयार केल्यामुळे दिर्घघनाचे घनफळ 36 घन एकक होईल. हे लांबी, रुंदी, उंची च्या गुणाकाराच्या बरोबर असते. वरील उदारहणावरुन असे म्हणता येई की, दिर्घघनाचे घनफळ $= l \times b \times h$. इथे $l \times b$ इथे म्हणजे तळाचे क्षेत्रफळ आहे. म्हणुन

दिर्घघनाचे घनफळ = तळाचे क्षेत्रफळ × उंची

कृत्य

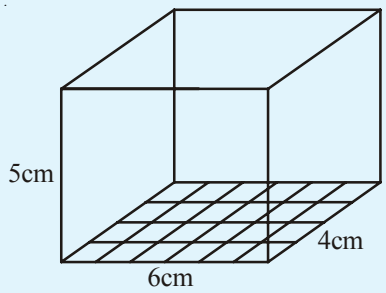
एक पेपरचा ठाव घ्या. त्याचे क्षेत्रफळ काढा. असेच काही पेपरचे ठाव घेऊन एकमेकांवर रचा जेणे करुन एक दिर्घघन तयार होईल (बाजुच्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे)या रचनेची उंची मोजा पेपरच्या ठावाचे क्षेत्रफळ काढुन रचनेची उंची आणि क्षेत्रफळ चा गुणाकार करा. दिर्घघनाचे घनफळ माहीत होईल.

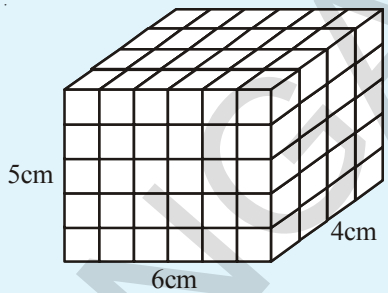


SCERT TELANGANA

हे करा

6 सें.मी., 4 से.मी. रुंदी, 5 सें.मी. उंची असलेल्या घनफ ळ माहित करा.





' दिर्घघनामध्ये 1 घन सें.मी. परिमानाचे ठोकळे रचा लांबीत किती ठोकळे बसतील. फ क्त 6 ठोकळे बसतील कारण लांबी 6 सें.मी. आहे.

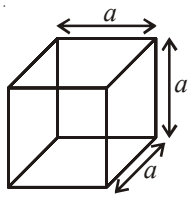
रुंदीत किती ठोकळे बसतील. फ क्त 4 ठोकळे बसतील कारण रुंदी 4 सें.मी. आहे. अशा प्रकारे तिथे एका रांगेत 6×4 ठोकळे बसतात.

अशा प्रकारे दिर्घघनात ठोकळ्यांच्या एकुण किती रांगा बसतील ? 5 रांगा बसतील कारण दिर्घघनाची उंची 5 सें.मी. आहे. प्रत्येक रांगेत 6×4 ठोकळे असतील. म्हणुन 5 रांगात एकुण $6 \times 4 \times 5$ ठोकळे असतील

चर्चेमूळे दिर्घघनाचे सुत्र माहिती होते.

दिर्घघनाचे क्षेत्रफळ =लांबी × रुंदी × उंची

14.3.2 घनाचे घनफळ



घनाची लांबी, रुंदी, उंची, सारखीच असते.

म्हणुन घनाचे घनफ ळ = बाजु × बाजु × बाजु

$= (\text{बाजु})^3 = a^3$

जिथे **a** ही घनाची बाजु आहे.

घनाची लांबी	घनाचे घनफळ
10मी.मी.=1सें.मी.	1000 मी.मी.^{3} = 1सें.मी.^{3}
10 सें.मी.= 1डें.मी.	1000 सें.मी.^{3} = 1डें.मी.^{3}
10डें.मी. = 1मी.	1000 डें.मी.^{3} = 1मी.^{3}
100सें.मी.= 1मी.	1000000 सें.मी.^{3} = मी.^{3}
1000मी.= 1 कि.मी.	1000000000 मी.^{3}= 1 कि.मी.^{3}

साधारणता: द्रव्यपदार्थाची क्षेत्रफळ मिलीमिटर (ml) किंवा लिटर (l) या एककात मोजतात

SCERT TELANGANA

नंतर 1 सें.मी.^{3} = 1 मी.ली.

1 l = 1000 सें.मी.^{3}

1 m^3 = 1000000 सें.मी.^{3} = 1000 l

= 1 kl (किलो मिटर)

उदाहरण 5: 20 सें.मी. लांब, 10 से.मी. रुंद आणि 8 सें.मी. उंचीच्या लाकडी ठोकळ्याचे घनफळ काढा

सोडवणुक : लाकडी ठोकळा एक दिर्घघन आहे. म्हणुन दिर्घघनाचे घनफळ $= l \times b \times h$

इथे लांबी (l) = 20 सें.मी., रुंदी (b) = 10 सें.मी. आणि उंची (h) = 8 सें.मी.

ठोकळ्याचे घनफळ = 20 से.मी. × 10 सें.मी. × 8 सें.मी. = 1600 सें.मी.^{3}

उदाहरण 6: एक पाण्याची टाकी 104 मीटर लांब आहे, 0.7 मीटर खोल आहे. तर टाकीची लिटर एककात घनफळ माहित करा.

सोडवणुक: टाकीची लांबी (l) = 1.4 मी. = 140 सें.मी.

टाकीची रुंदी (b) = 1 मी. = 100 सें.मी.

टाकीची खोली (h) = 0.7 = 70 सें.मी.

टाकीचे घनफळ $= l \times b \times h$

= (140 × 100 × 70) सें.मी.^{3}

$= \dfrac{140 \times 100 \times 70}{1000}$ लिटर

= 980 लिटर

हे करा.

64 एकक घनाला वेगवेगळ्या प्रकारे रचुन दिर्घघन तयार करा व वेगवेगळ्या दिर्घघनाचे पृष्टफळ काढा. सारख्या घनांचे पृष्टफळ सारखे असते काय ?

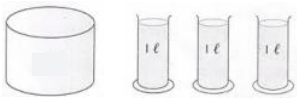
तुम्हाला माहित आहे काय.

क्षमता:

घनफळ आणि क्षमता यात फारसा फरक नाही

(a) घनफळ म्हणजे वस्तुने व्यापलेली जागा आहे.

(b) क्षमता म्हणजे भांड्यात सामावलेले परिमाण आहे.



घनफळ **क्षमता**

जर एका डब्यात 100 से.मी.^{3} इतके पाणी मावते तर डब्याची क्षमता 100सें.मी.^{3} आहे. क्षमतेला लिटर एककात सुध्दा मोजतात.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 7: एका दिर्घघनाची रुंदी ही लांबीच्या अर्धी आहे आणि उंची ही लांबीच्या दुप्पट आहे.

सोडवुणक: समजखा दिर्घघनाची लांबी x एकक आहे.

तेव्हा दिर्घघनाची रुंदी = $\frac{x}{2}$ एकक होईल.

आणि दिर्घघनाचे उंची = $2x$ एकक होईल.

दिर्घघनाचे घनफळ = लांबी × रुंदी × उंची

$= (x \times \frac{x}{2} \times 2x)$ घन एकक

$= x^3$ घन एकक

उदाहरण 8: एका डबा 1.8 मी. लांब, 90 सें.मी. रुंद, 60 सें.मी. उंच आहे. तर 6 सें.मी. × 4.5 सें.मी. × 40 मी.मी. आकाराची साबण वरील मापाच्या डब्यात किती बसतील ?

सोडवणुक: डब्याची लांबी (l) = 1.8 मी = 180 सें.मी.

डब्याची (b) = 90 सें.मी.

डब्यांची उंची (h) - 60 सें.मी.

डब्याची घनफळ = $l \times b \times h$

= 180 × 90 × 60 सें.मी.^{3}

= 972000 सें.मी.^{3}

साबणाची लांबी = 6 सें.मी.

साबणाची रुंदी = 4.5 सें.मी.

साबणाची उंची = 40 सें.मी. = 4 सें.मी.

साबणाचे घनफळ = 6 × 4.5 × 4 सें.मी.^{3}

= 108.0 सें.मी.^{3}=

∴ डब्यात मावणाऱ्या साबणाची संख्या = $\frac{\text{डब्याचे घनफळ}}{\text{एका साबनाचे घनफळ}}$

$= \frac{972000}{108}$

= 9000

म्हणुन, डब्यात एकुण 9000 साबण बसतील

SCERT TELANGANA

उदाहरण 9: 21 सें.मी. लांब, 9 सें.मी. रुंद, 8 सें.मी. उंच अशा परिमाणाच्या लाकडी ठोकळ्यातुन प्रत्येकी 3 सें.मी. मापचे घन कापल्यास एकुण किती घन तयार होतील व किती घनफळाचे लाकुड वाया जाईल ?

सोडवणुक: दिर्घघनाची लांबी (l) = 21 से.मी.

दिर्घघनाची रुंदी (b) = 9 सें.मी.

दिर्घघनाची उंची (h) = 8 सें.मी.

दिर्घघनाची घनफळ = $21 \times 9 \times 8 = 1512$ घन सें.मी.

लांबीतुन इतके घन कापता येतील. $= \frac{21}{3} = 7$

रुंदीतुन इतके घन कापता येतील. $= \frac{9}{3} = 3$

उंचीतुन इतके घन कापता येतील. $= \frac{8}{3} \simeq 2.6$

उंचीतुन फक्त दोनच तुकडे कापता येतात बाकीचे वाया जाते.

$\therefore$ लांबी, रुंदी,उंचीतुन कापलेले एकुण घन $= 7 \times 3 \times 2$

$= 42$ घन सें.मी.

प्रत्येक घनाचे घनफळ $= 3 \times 3 \times 3$ $= 27$ सें.मी.^{3}

सर्व घनाचे घनफळ $= 27 \times 42$

$= 1134$ सें.मी^{3}

$\therefore$ वाया गेलेल्या लाकडी तुकड्याचे घनफळ $= 1512 - 1134 = 378$ सें.मी.^{3}

उदाहरण10: एका दिर्घघनाकृती टाकीत 60 लिटर प्रति मिनीट या दराने पाणी पडत आहे. जर टाकीचे घनफळ108 मी.^{3} असेल तर टाकी पुर्ण भरायला किती वेळ लागेल.

सोडवणुक: टाकीचे घनफळ = 108 मी.^{3} = 108 × 1000 लिटर

($\because$ 1मी.^{3} = 1000 लिटर)

टाकीत 60 लिटर प्रति मीनीट दराने पाणी पडत आहे.

$\therefore$ टाकी भरायला लागणारा वेळ $= \frac{108 \times 1000}{60}$ मीनीट

$= \frac{108 \times 1000}{60 \times 60}$ तास = 30 तास

SCERT TELANGANA

उदाहरण 11 : एका गावाची लोकसंख्या 4000 आहे.प्रत्येक माणसाला दरदिवशी150 लिटर पाणी लागते.गावात20 मी.15 मी , 6 मी. उंच मापाची टाकी आहे. एकदा भरलेल्या टाकीतील पाणी किती दिवस पुरेल.

सोडवणुक: टाकीचे घनफळ = 20 मी × 15 मी × 6 मी

= 1800 मी^{3} = 1800000 लिटर

दर डोई दर दिवशी लागणारे पाणी = 150 लिटर

दर दिवशी सर्व लोकांना लागणारे पाणी = 150 × 4000

$$\text{टाकीतील पाणी इतके दिवस पुरेल} = \frac{\text{टाकीचे घनफळ}}{\text{एका दिवसात वापरलेल्या पाण्याचे घनफळ}}$$

$$= \frac{1800000}{150 \times 4000} = 3 \text{ दिवस}$$

अभ्यास 14.2

1. खालील दिलेल्या मापांच्या दिर्घघनाचे घनफळ काढा.

	लांबी	रूंदी	उंची
(i)	8.2 मी.	5.3 मी.	2.6 मी.
(ii)	5.0 मी.	4.0 मी.	3.5 मी.
(iii)	4.5 मी.	2.0 मी.	2.5 मी.

2. खालील दिलेल्या मापाच्या टाकींची क्षमता माहित करा. प्रत्येक टाकीची क्षमता घन मिटर आणि घन लिटर मध्ये दर्शवा.

	लांबी	रूंदी	उंची
(i)	3 मी. 20 सें.मी.	2 मी. 90 सें.मी.	1 मी. 50 सें.मी.
(ii)	2 मी. 50 सें.मी.	1 मी. 60 सें.मी.	1 मी. 30 सें.मी.
(iii)	7 मी. 30 सें.मी.	3 मी. 60 सें.मी.	1 मी. 40 सें.मी.

3. जर घनाच्या कडाची बाजु अर्धी केली तर घनाच्या घनफळात काय फरक होतो. घनफळ कमी होईल काय ? जर होते असेल तर किती होईल ?

SCERT TELANGANA

4. खालील प्रत्येक घनाचे घनफळ काढा बाजु दिलेली आहे.
(i) 6.4 सें.मी. (ii) 1.3 मी. (iii) 1.6 मी.

5. एक विट 25 सें.मी.लांब, 11.25 से.मी. रूंद, 6 सें.मी. उंच आहे. तर 8 मी. लांब, 6 मी. उंच, 22.5 सें.मी . जाड भिंत बांधायला किती विटा लागतील?

6. एक दिर्घघन 25 सें.मी. लांब, 15 सें.मी. जाड आणि 8 सें.मी. उंच आहे. दुसरा 16 सें,मी. चा घन आहे. तर या दोन्हीच्या घनफळाचा फरक किती होईल?

7. एक 1 सें.मी. जाड अशी लाकडाची पेटी आहे. पेटीचे बाहेरील परिमाण 5 सें.मी. × 4 सें.मी. × 7 सें.मी. आहे. तर पेटी तयार करण्यासाठी वापरेल्या लाकडाचे घनफळ होईल?

8. 20 सें.मी.लांब, 18 सें.मी. रुंद, 20 सें.मी. उंच असलेल्या दिर्घनातुन 4 सें.मी. चे किती घन कापुन काढता येईल.

9. 12 सें.मी. × 9 सें.मी. × 6 सें.मी. परिमान असलेल्या दिर्घघनातुन 4 सें.मी. × 3 सें.मी. × 2 सें.मी. या परिमानाचे किती दिर्घघन तयार करता येतील?

10. 30 सें.मी. आणि 25 सें.मी. रुंद आकाराचे भांडे आहे त्यात 4.5 लिटर पाणी मावण्यासाठी भांड्याची उंची किती असायला पाहिजे?.

आपण कशाची चर्चा केली ?

1. जर l, b, h एका दिर्घघनाचे परिमाण असतील तर
   (i) तिच्या पाश्चबाजुचे पृष्टफळ $2h\,(l + b)$
   (ii) दिर्घघनाचे एकुण पृष्टफळ $2\,(lb + bh + hl)$
2. घनाचा पार्श्वबाजुचे पृष्टफळ $4a^2$
3. घनाचे एकुण पृष्टफळ $6a^2$
4. दिर्घघनाचे घनफळ $l \times b \times h$
5. घनाचे घनफळ बाजु × बाजु × बाजु = a^3
6. 1 सें.मी.^{3} = 1 मी.ली.
   1 लिटर = 1000 सें.मी.^{3}
   1 मी.^{3} = 1000000 सें.मी.^{3} = 1000 l
   = 1 कि.लि. (किलोलिटर)

SCERT TELANGANA

धडा 15

संख्याशी खेळ

15.0 प्रस्तावना

अशी कल्पना करा ..... एके दिवशी तुम्ही संख्या नसलेल्या अद्‌भुत जगात आहात असे समजा तिथला दिवस कसा जाईल ?
तुम्हाला महिणा पाहुन दिनांक सांगण्यासाठी दिनदर्शिका राहणार नाही.. तुमच्या मित्राला फोन करता येणार नाही.

घर नंबर नसल्यामुळे मित्राचे घर शोधण्यात दिवसभर दार खडखडविण्यात थकुन जाल,हि काही उदाहरणे आहेत.
अशाच आणखी काही प्रसंगाची नोंद करा ज्यात संख्या नसल्यामुळे त्रास होतो.
बरोबर, तुम्ही शाळेला उशीरा जाल, तुमची आवडती कार्टुन मालीका बघायची चुकेल, कारण घड्याळच नाही, नसेल ना.
संख्येशिवाय क्रिकेट बॉल राहणार नाही.
म्हणुन संख्येशिवाय जगाची कल्पना करता येणार नाही. वस्तु विकत घेण्यासाठी, विकण्यासाठी हव्या त्या प्रमाणात
समजा जर एखादी वस्तु मित्रात वाटायची आहे. काय कराल ?
कोणत्या मुलभुत प्रक्रिया कराव्या लागतील सांगा बर, या सर्व प्रक्रियेत संख्या आणि विभाज्याता नियम असतात. विभाज्यता नियमाचा आपणास फार उपयोग होतो. यामुळे भागाकार न करता एखाद्या संख्येला एखाद्या संख्येने भाग जातो का नाही सांगाता येते.
चला मुळ प्रक्रियाचा आणि विभाज्यता नियमाचा वापर करुन संख्येशी खेळ खेळु या.

15.1 विभाज्यता नियम

काही संख्या घेऊन त्यांना 2 ने भाग जातो का, 3 ने 4, 5, 6, 7, ने भाग जातो का पडताळुन पहा,

जेव्हा'a' या संख्येला 'b'ने पुर्ण भाग जातो. तेव्हा 'b' या संख्येला'a' भाग जातो असे म्हणतात. यापाठात आपण विभाज्यता आणि त्या मागचा तर्क शिकणार आहोत. प्रथम स्थान किंमत आणि अवयवाची उजळणी करा.

15.1.1 अंकाची स्थान किंमत :

645 ही संख्या घेऊन तीला विस्तृत रुपात लिहु या.

$645 = 600 + 40 + 5 = 6 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

वरील 645 संख्येत 6 ची स्थान किंमत 600 आहे. 4 ची 40 आहे. 645 मध्ये 6 शतक , 4 शतक 5 एकक आहेत.

SCERT TELANGANA

हे करा

अधोरेखीत अंकाची स्थान किंमत ओळखा?

(i) 29879 (ii) 10344 (iii) 98725

15.1.2 संख्याचे विस्तृत रुप :

संख्येला विस्तृत रुपात कसे लिहायचे हे आपणास माहित आहे. तसेच संख्येला 10 चा घातांक घेऊन घातांकाच्या रुपात कसे लिहायचे हे पण माहित आहे.

उदाहरणार्थ

प्रामाणिक रुप		विस्तृत रुप		
$68 = 60+8$	$=$	$(10 \times 6) + 8$	$=$	$(10^1 \times 6) + (10^0 \times 8)$
$72 = 70+2$	$=$	$(10 \times 7) + 2$	$=$	$(10^1 \times 7) + (10^0 \times 2)$

आपणास माहित आहे
$10^0 = 1$

समजा $10a + b$ ही दोन अंकी संख्या आहे. जिच्या एकम स्थानी a आणि दहम स्थानी b आहे. यास वरील उदाहरणात दाखविल्याप्रमाणे लिहु शकतो.

जसे $(10 \times a) + b = (10^1 \times a) + (1 \times b)$. (जिथे $a \neq 0$)

आता, 658 ही तीन अंकी संख्या पाहु या. या संख्येला खालील प्रमाणे लिहता येते.

प्रामाणिक रुप विस्तृत रुप

$$658 = 600 + 50 + 8 = 100 \times 6 + 10 \times 5 + 1 \times 8 = 10^2 \times 6 + 10^1 \times 5 + 1 \times 8$$

तसेच $759 = 700 + 50 + 9 = 100 \times 7 + 10 \times 5 + 1 \times 9 = 10^2 \times 7 + 10^1 \times 5 + 1 \times 9$

साधारणता: a, b, c या तिनी अंकानी बनलेल्या संख्येला असे लिहिता येते $10^2a + 10^1b + c = 100 \times a + 10 \times b + c = 100a + 10b + c$, (जेथे $a \neq 0$).

आपण एखादी संख्या खालील प्रमाणे लिहु शकतो.

$$3456 = 3000 + 400 + 50 + 6 = 1000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 6$$
$$= 10^3 \times 3 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 5 + 6$$

अशा प्रकारे a, b, c ,d या अंकानी बनलेली चार अंकी संख्या खालील प्रमाणे लिहिता येते.

$$1000a + 100b + 10c + d = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d \text{ (जेथे } a \neq 0)$$
$$= 10^3a + 10^2b + 10^1c + d.$$

SCERT TELANGANA

हे करा :

1. खालील संख्याना विस्तृत रुपात लिहा.

   (i) 65 (ii) 74 (iii) 153 (iv) 612

2. खालील प्रामाणिक रुपात लिहा.

   (i) $10 \times 9 + 4$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 4 + 3$

3. रिकाम्या जागा भरा.

   (i) $100 \times 3 + 10 \times$ _____ $+ 7 = 357$

   (ii) $100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 =$ _____

   (iii) $100 \times$ _____ $+ 10 \times 3 + 7 = 737$

   (iv) $100 \times$ ____ $+ 10 \times q + r = pqr$

   (v) $100 \times x + 10 \times y + z =$ _____

15.1.3 अवयव आणि संख्याचे गुणक:

36 चे अवयव कोणते?

36 चे अवयव 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.आहेत 36 च्या अवयवापैकी सर्वात मोठे अवयव कोणते ?

$1 \times 36 = 36$	$4 \times 9 = 36$
$2 \times 18 = 36$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 12 = 36$	

कोणत्याही संख्येचा अवयव त्या संख्येच्या समान किंवा लहान सख्याच असते.

संख्येचा सर्वात मोठा अवयव स्वत:तीच संख्या असते.

म्हणुन प्रत्येक संख्या स्वत:चा अवयव असते आणि '1' हा सर्व संख्याचा अवयव असतो.

$7 \times 1 = 7$, $9 \times 1 = 9$,

जर एखाद्या संख्येला 1 आणि तीच संख्या अवयव असेल तर अशा संख्याना काय म्हणतात. त्यांना मुळ संख्या म्हणतात.

उदा. : 2, 3, 5, 7, 11, 13,....इत्यादी

11 , 23 , 4567 , 89 या क्रमवार अंकानी बनलेल्या मनोरंजक मुळ संख्या आहेत.

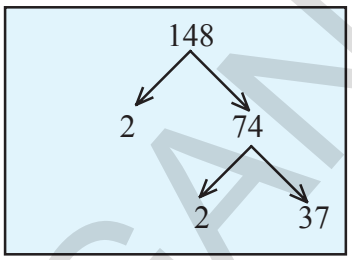
191, 911, 199, 919, 991 या संख्या मुळ संख्या आहेत का नाही ते पडताळुन पहा.?

828179787776757473727170696867666564636261605958575655545352
515049484746454443424140393837363534333231302928272625242322212019 18
171615141312111098765432 1
हा क्रमांक 82 ने सुरु होते व शेवटी 1 ने संपतो ही मुळ संख्या आहे.

SCERT TELANGANA

148 चे मुळ अवयव पाढा.

$148 = 2 \times 74 = 2 \times 2 \times 37 = 2^2 \times 37^1$



148 च्या एकुण अवयवाची संख्या ही मुळ अवयवाच्या गुणाका एवढी असते.(अवयवयाचा घातांक + 1) आहेत.

म्हणजेच $(2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

1, 2, 4, 37, 74, 148 आहेत.

जर एखादी संख्या मुळ संख्येच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहु शकता येते असेल, जसे $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$ ...

$(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ ...तर एन संख्येचे अवयव असतील

6 चे पहिले 5 गुणक कोणते ?

$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 18$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$

6, 12, 18, 24, 30 हे 6 पहिले पाच गुणक आहेत. आपणास असे किती गुणक लिहु शकता येतील? अशा प्रकारे एखाद्या संख्येला अनंत संख्य गुणक असतात असे म्हणता येईल.

हे करा :

1. खालील सर्व संख्येचे गुणक लिहा.
   (a) 24 (b) 15 (c) 21 (d) 27
   (e) 12 (f) 20 (g) 18 (h) 23 (i) 36
2. खालील संख्येचे पहिले पाच गुणक लिहा:
   (a) 5 (b) 8 (c) 9
3. खालील संख्याचे मुळ अवयव पाढा.
   (a) 72 (b) 158 (c) 243

15.1.4 10ची विभाज्यता :

10 या संख्येचे गुणक 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...इत्यादी आहेत.

या सर्व संख्याच्या एकक स्थानी '0' आहे.

म्हणजेच 10 च्या सर्व गुणकाच्या एकक स्थानी 0 असेल असे म्हणता येईल नाही का? होय चला आता या नियमाच्या मागचे तर्क काढु या.

SCERT TELANGANA

अशी एखादी तीन अंकी संख्या घेतली शतक स्थानी 'a'दशक स्थानी 'b' आणि एकक स्थानी आहे 'c' आहे तशा संख्येला $100a + 10b + c = 10(10a + b) + c$ असे लिहिता येते.

$10(10a + b)$ हा10चा गुणक आहे. 'c' जर 10 चा गुणक असेल तर त्यासंख्येला 10 ने पुर्ण भाग जातो. हे फक्त $c = 0$ असेल तर च शक्य आहे.

हे करा

1. खालील दिलेल्या संख्यांना 10 ने पुर्ण भाग जातो का नाही ?

   (a) 3860 (b) 234 (c) 1200 (d) 10^3 (e) $10 + 280 + 20$

2. खालील दिलेल्या संख्याना 10 ने पुर्ण भाग जातो का नाही ?

   (a) 10^{10} (b) 2^{10} (c) $10^3 + 10^1$

प्रयत्न करा

1. $56Z \div 10$ यात 6 शिल्लक राहते तर Z ची किंमत किती असेल हे सांगा.

15.1.5 5 विभाज्यता :

5 चे गुणक पहा 5,10,15, 20,25,30,35 ,40,45,50,.....इत्यादी

या सर्व संख्येच्या एकक स्थानी '0' किंवा '5' आहे.

जर संख्येच्या एकक स्थानी '0' किंवा '5' असेल तर त्या संख्येला 5 ने पुर्ण भाग जातो .

चला आता, या नियमाच्या मागचा तर्क पाहुया

$100a + 10b + c$ अशी तीन अंकी संख्या घेतली जिच्या शतकस्थानी a दशक स्थानी b आणि एकक स्थानी c आहे. या संख्येस असे लिहिता येईल. जसे $100a + 10b + c = 5(20a + 2b) + c$

$5(20a + 2b)$ हे 5 चे गुणक आहे.

जर संख्येच्या एकक स्थानी व किंवा 5 असेल तरच त्यसा संख्येला 5 ने पुर्ण भाग जातो

$c = 0$ किंवा 5

हे करा

1. खालील दिलेल्या संख्यांना 5 ने पुर्ण भाग जातो का नाही ?

   (a) 205 (b) 4560 (c) 402 (d) 105 (e) 235785

SCERT TELANGANA

जर 34A ला 5 ने भाग जातो तर A ची किंमत किती असेल ?
दिलेल्या संख्येत एकक स्थानी A आहे. Aच्या ठिकाणी 0 किंवा 5 असेल तरच 34A पुर्ण भाग जातो.
म्हणुन A = 0 किंवा 5 असेल.

प्रयत्न करा

1.जर 4B ÷ 5 केल्यास शिल्लक 1 राहते तर B ची किंमत किती असेल ?
2.जर 76C ÷ 5 केल्यास शिल्लक 1 राहते तर C ची किंमत किती असेल ?
3."जर एखाद्या संख्येला 10 ने पुर्ण भाग जात असेल तर त्या संख्येला 5 ने पुर्ण भाग जातो." हे विधान सत्य आहे का ? कारणे सांगा.
4."जर एखाद्या संख्येला 5 ने पुर्ण भाग जात असेल तर त्यासंख्येला 10 ने पुर्ण भाग जातो." हे विधान सत्य आहे की असत्य आहे ? कारणे सांगा.

15.1.6 2 ची विभाज्यता:

2 चे गुणक पहा 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...इत्यादी

वरील 2 चे गुणक पाहिले तर संख्येच्या शेवटी 0,2,4,6, 8 हे अंक आहेत असे दिसते.

जर संख्येच्या एकक स्थानी किंवा 0 किंवा 2 किंवा 4 किंवा 6 किंवा 8 (समसंख्या) असेल तर त्या संख्येस 2ने पुर्ण भाग जातो नाही तर त्यासंख्येस 5 ने पुर्ण भाग जातो नाही तर 2 ने भाग जात नाही.
चला आता, या नियमाच्या मागचा तर्क काढु या.

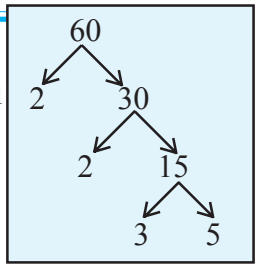
जर $100 \times a + 10 \times b + c$ हे तीन अंकी संख्या घेतली जिच्या शतक स्थानी a, दशक स्थानी b, एकक स्थानी c आहे. यासंख्येस $100a + 10b + c = 2(50a + 5b) + c$ असे लिहिता येते.

$2(50a + 5b)$ हे 2 चे गुणक आहे.जर एखाद्या संख्येला 2 ने भाग जात असेत तर त्या संख्येच्या एकक स्थानी c = 0 किंवा 2 किंवा 4 किंवा 6 किंवा 8 (सम संख्या) असतात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. एखाद्या संख्येला 5 ने भागील्यास 2 शिल्लक राहते तर एकक स्थानची संख्या किती असले, एखाद्या संख्येला 3 ने भागील्यास 1 शिल्लक राहते तर एकक स्थानची संख्या किती असेल.

उदाहरण 1: 60 चे शक्य तेवढे अवयव लिहा ?



सोडवणुक : 60 ला मुळ अवयवाच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहिता येते. जसे $2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$\therefore$ अवयवांची संख्या $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 अवयव आहेत.

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 15.1

1. विभाज्यता नियमाचा उपयोग करुन खालील कोणत्या संख्यांना 2,5,10 ने भाग जातो किंवा नाही , ते खालील तक्त्यात लिहा. यात तुम्हाला काय दिसुन येते ?

संख्या	2 ने भाग जातो	5 ने भाग जातो	10 ने भाग जातो.
524	होय	नाही	नाही
1200			
535			
836			
780			
3005			
4820			
48630			

2. विभाज्यता परिक्षण नियमाच्या उपयोग करुन खालील कोणत्या संख्याला 2 ने भाग जातो. ते लिहा.

   (a) 2144 (b) 1258 (c) 4336 (d) 633 (e) 1352

3. विभाज्यता परिक्षण नियमाच्या उपयोग करुन खालील कोणत्या संख्याला 5 ने पुर्ण भाग जातो का ते लिहा.

   (a) 438750 (b) 179015 (c) 125 (d) 639210 (e) 17852

4. विभाज्यता परिक्षण नियताचा उपयोग करुन खालील कोणत्या संख्याला 10 ने पुर्ण भाग जातो ते लिहा.

   (a) 54450 (b) 10800 (c) 7138965 (d) 7016930 (e) 10101010

5. खालील संख्याचे अवयव लिहा ?

   (a) 18 (b) 24 (c) 45 (d) 90 (e) 105

6. 2,5 अणि 10 ने भाग जाणाऱ्या कोणत्याही 5 संख्या लिहा.

7. 34A.ला 2 ने पुर्ण भाग जातो आणि 5 ने भागील्यास शिल्लक 1 राहते. तर A ची किंमत किती असेल?

15.1.7 3 आणि 9 चा विभाज्यता नियम :

378 या संख्येला असे लिहिता येते 378 $= 300 + 70 + 8$

$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$

इथे 3 ला साधारण अवयव म्हणुन बाहेर काढता येते. $= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$

SCERT TELANGANA

म्हणुन आता क्रम बदलुन लिहु या

$$378 = 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 99 \times 3 + 3 \times 3 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 3\,(99 + 21) + (3 + 7 + 8)$$

$3(99 + 21)$ हा 3 चा गुणक आहे. म्हणुन जर संख्येतील अंकाची बेरीज $(3 + 7 + 8)$ ही 3 चा गुणक असेल तर त्या संख्येला 3 ने पुर्ण भाग जातो.

9 ची विभाज्यता :

378 ला

$$378 = 300 + 70 + 8$$ असे लिहीता येते.
$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$
$$= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$$
$$= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 9\,(11 \times 3 + 1 \times 7) + (3 + 7 + 8)$$
$$= 9\,(33 + 7) + (3 + 7 + 8)$$

$9(33 + 7)$ ही संख्या 3 चा गुणक आहे. जर दिलेल्या संख्येला 9 ने पुर्ण भाग जात असेल तर $(3 + 7 + 8)$ संख्येतील अंकाची बेरीज सुध्दा 9 चा गुणक असेल.

चला आता नियम स्पष्ट करु या.

जर $100a+10b+c$ ही तिन अंकी संख्या येथे घेतली तर तीन अंकी संख्या घेतली तिच्या शतक स्थानी 'a' दशक स्थानी 'b' एकक स्थानी 'c' आहे.

$$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1) + c = 99a + 9b + (a + b + c)$$
$$= 9(11a + b) + (a + b + c) \rightarrow \text{संख्येतील अंकाची बेरीज}$$

$9(11a + b)$ ही संख्या 3 आणि 9 चा गुणक आहे. म्हणुन या संख्या 3 किंवा 9 ने पुर्ण भाग जातो.

कोणत्याही संख्येतील अंकाची बेरीज $(a + b + c)$, 3 चा किंवा 9 चा गुणक असेल तर त्यासंख्येस 9 व 3 ने भाग जातो $(a+b+c)$ भाग जातो.

हा विभाज्यता नियम 3 अंकापेक्षा जास्त अंकी संख्याना लागु पडतो का ? 5 आणि 6 अंकी संख्या घेऊन तपासणी करा.

कोणत्याही संखेला 2,5 आणि 10 ने भाग जातो कि नाही हे एकक स्थानच्या अंकावरच अवलंबुन असते पण 3आणि 9 ने भाग जातो किंवा नाही हे सर्व अंकावर आधारित असते हे आपण शिकलोत.

हे करा

1. खालील दिलेल्या संख्याना 3 ने 9 ने किंवा 3 आणि 9 दोन्हीने भाग जातो का पडताळ करुन पहा?

(a) 3663 (b) 186 (c) 342 (d) 18871

(e) 120 (f) 3789 (g) 4542 (h) 5779782

SCERT TELANGANA

उदाहरण 2: 24 P ला 3 ने भागील्यास शिल्लक 1 राहते. जर 24 P ला 5 ने भागील्यास शिल्लक 2 राहते तर P ची किंमत काढा.

सोडवणुक : जर 24 P ला 5 ने भागील्यास 2 शिल्लक राहत असले तर P ची किंमत 2 किंवा 7 असु शकते.

जर P = 2समजले तर 24 P ला 3 ने भागील्यास 2 शिल्लक राहते P = 7समजले तर 24 P ला 3 ने भागील्यास 1 शिल्लक राहते म्हणुन P = 7 बरोबर आहे.

अभ्यास -15.2

1. जर 345 A 7 या संख्येला 3 ने पुर्ण भाग जात असेल तर संख्येतील 'A' ची किंमत काढा.
2. जर 2791 A या संख्येला 9 ने पुर्ण भाग जात असेल तर संख्येतील 'A' ची किंमत काढा.
3. 2,3,5,9 आणि 10या अंकानी भाग जाणाऱ्या काही संख्या लिहा.
4. 2A8 ला 2 ने पुर्ण भाग जातो तर Aची किंमत किती असेल ?
5. 50B ला 5 ने पुर्ण भाग जातो तर Bची किंमत किती असेल ?
6. 2P ला 2 आणि 3 ने पुर्ण भाग जातो तर P किंमत किती असेल.
7. 54Z ला 5 ने भागील्यास 2 शिल्लक राहते आणि 3 ने भागील्यास 1 शिल्लक राहते तर Z ची किंमत काढा ?
8. 27Q ला 5 ने भागील्यास 3 शिल्लक राहते आणि 3 भागील्यास किती शिल्लक राहतील ?

15.1.8 6 ची विभाज्यता :

6 चा एखादा गुणक घ्या समजा 24 घेतले.

24 ला 6 ने भाग जातो हे माहितच आहे.

24 ला 6 च्या अवयवाने भाग जातो काय ? जसे 3 आणि 2 ने

24 च्या एकक स्थानी 4 आहे म्हणुन त्याला 2 ने भाग जातो.

24 च्या अंकाची बेरीज 2+4 = 6 येते 6 ला 3 ने भाग जातो.

आता, हेच 6 च्या दुसऱ्या गुणकासोबत साध्य होते का पडताळुन बघा

आता असे म्हणता येईल की जर एखाद्या संख्येला 6 ने पुर्ण भाग जात असेल तर त्या संख्येला 6 चे अवयव 2 आणि 3 ने सुध्दा भाग जातो.

चला आता, वरील विधानाच्या विरुध्द विचार करु या.

एखादी संख्याला 2 ने भाग जातो म्हणजे 2 मुळ अवयव आहे. जर तिला 3 ने भाग जातो म्हणजे 3 मुळ अवयव आहे.

SCERT TELANGANA

म्हुणन जर एखाद्या संख्येला 2 अणि 3 ने भाग जात असेल तर 2 आणि 3 हे त्याचे मुळ अवयव होईल, 2 आणि 3 चा गुणाकार $2 \times 3 = 6$ सुध्दा त्या संख्येचा अवयव होईल.

दुसऱ्या शब्दात जर एखाद्या संख्याला 6 ने भाग जात असेल तर त्या संख्येला 2 आणि 3 ने सुध्दा भाग जातो.

हे करा:

1. खालील संख्यांना 6 ने पुर्ण भाग जातो का नाही पडताळ करुन पहा ?

   (a) 1632 (b) 456 (c) 1008 (d) 789 (e) 369 (f) 258

2. खालील संख्याना 6 ने पुर्ण भाग जातो का नाही पडताळ करुन पहा ?

   (a) $458 + 676$ (b) 6^3 (c) $6^2 + 6^3$ (d) $2^2 \times 3^2$

15.1.9 4 आणि 8 ची विभाज्यता :

(a) समजा $1000a + 100b + 10c + d =$ ही चार अंकी संख्या आहे.$(250a + 25b) + (10c + d)$. $4(250a + 25b)$ हा 4 चा गुणक आहे. जर दिलेल्या संख्येच्या $10c+d$ ला 4 ने भाग जात असेल तरच त्या संख्येला 4 ने पुर्ण भाग जातो.

दिलेल्या संख्येंच्या शेवटच्या दोन अंकानी बनलेल्या संख्येला 4 ने पुर्ण भाग जात असेल तर त्या संख्येला 4 ने पुर्ण भाग जातो किंवा

दिलेल्या संख्येचे शेवटेच अंक 0 असतील तर त्यासंख्येला 4 ने पुर्ण भाग जातो.

चार अंकी संख्येपेक्षा मोठी संख्या घेऊन त्यास विस्तृत रुपात लिहा. एकक स्थानी व दशक स्थानी 4 चे गुणक नसलेली संख्या लिहीता येईल का ?

4 ची विभाज्यता शेवटच्या दोन अंकावर आधारीत असते कि नाही हे चार अंकी संख्येपेक्षा मोठी संख्या घेऊन पडताळुन पहा.

(b) $1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$ ही चार अंकी संख्या घेऊ या.

$1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d = 1000a + 100b + 10c + d = 8(125a) + (100b + 10c + d)$

$8(125a)$ ला 8 ने नेहमी भाग जातो. म्हणुन दिलेल्या संख्येला 8 ने भाग जाण्यासाठी $(100b+10c+d)$ ला 8 ने भाग गेला पाहिजे.

जर दिलेल्या संख्येच्या शेवटच्या तीन अंकांना 8 ने पुर्ण भाग जात असेल किंवा संख्येच्या शेवटचे तीन अंक 0 असतील तर त्या पुर्ण संख्येला 8 ने भाग जातो.

एखादी चार अंकी संख्या पेक्षा मोठी संख्या घेऊन त्यास विस्तृत रुपात लिहा. एकक, दशक व शतक स्थानी 8 चे गुणक नसलेली संख्या लिहिता येईल काय?

एखादी चार अंकी संख्येपेक्षा मोठी संख्या घ्या. व 8 ची विभाज्यता संख्येच्या शेवटच्या तीन अंकावर अवलंबुन असते. किंवा नाही पडताळुन पहा.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 3: 6582 ला 4 ने भाग जातो किंवा नाही पडताळुन पहा ?

सोडवणुक: 6582 संख्येत शेवटच्या दोन अंकाने 82 ही संख्या तयार होते. 82 ला 4 ने भाग जात नाही म्हणुन दिलेल्या 6582 संख्येला 4 ने पुर्ण भाग जात नाही.

उदाहरण 4: 28765432 ला 8 ने पुर्ण भाग जातो का नाही पडताळुन बघा ?

सोडवणुक : 28765432 या संख्येत शेवटच्या तीन अंकानी 432 ही संख्या तयार होते. 432 ला 8 ने भाग जातो म्हणुन दिलेल्या संख्येला 8 ने पुर्ण भाग जातो.

जर संख्येंला 8 ने पुर्ण भाग जातो त्या संख्येला 4 ने सुध्दा पुर्ण भाग जातो. पण ज्या संख्येला 8 ने सुध्दा पुर्ण भाग जातो. असे म्हणता येत नाही. 8 च्या सर्व गुणकाला 4 ने पुर्ण भाग जातो. पण 4 च्या सर्व गुणकाला 8 ने भाग जातोच असे नाही.

हे करा:

1. खालील दिलेल्या सर्व संख्याना 4 ने भाग जातो का 8 ने भाग जातो का ? किंवा 4 आणि 8 दोन्हीने भाग जातो का ते पडताळुन पहा.

(a) 464 (b) 782 (c) 3688 (d) 100
(e) 1000 (f) 387856 (g) 4^4 (h) 8^3

प्रयत्न करा :

1. खालील दिलेल्या सर्व संख्याना 4 ने भाग जातो का. 8 ने भाग जातो का ? किंवा 4 व 8 ने दोन्ही भाग जातो का ते पडताळुन बघा

(a) $4^2 \times 8^2$ (b) 10^3 (c) $10^5 + 10^4 + 10^3$ (d) $4^3 + 4^2 + 4^1 - 2^2$

15.1.10 7 ची विभाज्यता

$100 \times a + 10 \times b + c$ या तीन अंकी संख्शेला खालील प्रमाणे लिहिता येते.

$$100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$$

इथे 4 हा सामाईक अवयव आहे. म्हणुन त्यास सामाईक अवयव रुपात लिहु या.

$$= 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$$

$7(14a + b)$ हा 7चा गुणक आहे. म्हणुन जर $(2a + 3b + c)$ ला 7 ने भाग जात असेल तर दिलेल्या संख्येला 7 ने पुर्ण भाग जातो.

उदाहरण 5: 364 ला 7 ने भाग जातो का ?

सोडवणुक : इथे $a = 3, b = 6, c = 4, (2a + 3b + c) = 2 \times 3 + 3 \times 6 + 4$

$= 6 + 18 + 4 = 28$ (28 ला 7 ने पुर्ण भाग जातो)

म्हुणन 364 ला 7 ने पुर्ण भाग जातो.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 या अंकापैकी सुरुवातीच्या दोन अंकाने, 2 ने भाग जाणारी संख्या तयार करा. सुरुवातीच्या तीन अंकाने 3 ने भाग जाणारी संख्या तयार करा. सुरुवातीच्या चार अंकाने, 4 ने भाग जाणारी संख्या तयार करा.

सोडवुणक : 123654987 तपासुन बघा.

SCERT TELANGANA

प्रयत्न करा:

1 एखादी साधारण चारअंकी संख्या घेऊन 7 च्या विभाज्यता नियम पडताळुन पहा.

2. 3192 हि संख्या 7 चा गुणक आहे. यास 7 चा विभाज्यता नियम पडताळुन पहा.

हे करा

1. खालील दिलेल्या संख्यांना 7 ने पुर्णभाग जातो का नाही ? पडताळुन पहा.

(a) 322 (b) 588 (c) 952 (d) 5502 (e) 4438

15.1.11 11 ची विभाज्यता:

$10000a + 1000b + 100c + 10d + e$

इथे 11 ला सामाईक अवयव म्हणुन बाहेर काढु या. यासाठी वरील संखेची खालील प्रमाणे पुनरचना करु या.

$= (9999 + 1)\,a + (1001-1)\,b + (99 + 1)\,c + (11-1)\,d + e$

$= 9999a + 1001\,b + 99c + 11d + a - b + c - d + e$

$= 11\,(909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) - (b + d)$

$11\,(909a + 91b + 9c + d)$ ला 11 ने पुर्ण भाग जातो.

जर $(a + c + e) - (b + d)$ हा 11 ने पुर्ण भाग जात असेल तर दिलेल्या संख्येला 11 ने पुर्ण भाग जातो.

म्हणजेच $(a + c + e) - (b + d)$ ची किंमत 11 किंवा 0 आहे.

जर संख्येतील विषम स्थानावरील अंकाची बेरीज $(a + c + e)$ व सम स्थानातील अंकाची बेरीज $(b + d)$ करुन त्या दोन बेरजेची वजाबाकी 11 किंवा 0 येत असेल तर त्या संख्येला 11 ने पुर्ण भाग जातो.

खालील तक्ता बघा.

संख्या	संख्येच्या डाव्याबाजु कडुन उजवी कडे विषम स्थानावरील अंकाची बेरीज	संख्येच्या डाव्याबाजु कडुन उजवी कडे सम स्थानावरील अंकाची बेरीज	फरक वजाबाकी
308	$3 + 8 = 11$	0	$11 - 0 = 11$
1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
61809	$6 + 8 + 9 = 23$	$1 + 0 = 1$	$23 - 1 = 22$

वरील प्रत्येक संदर्भात आढळुन आले की, फरक 11 किंवा 0 आहे म्हणुन वरील सर्व संख्यांना 11 ने पुर्ण भाग जातो.

SCERT TELANGANA

5081या संख्यातील विषम स्थानावरील अंकाची बेरीज व सम स्थानावरील अंकाची बेरीज (5 + 8) – (0 + 1) = 12 येते म्हणुन 5081 ला 11 ने भाग जात नाही.

हे करा

1. खालील दिलेल्या संख्याना 11 ने भाग जातो का नाही पडताळा करा.

   (i) 4867216 (ii) 12221 (iii) 100001

123 ही तीन अंकी संख्या घ्या.

या संख्येला दोनदा लिहा, 123123. येईल

आता, संख्येला डाव्या बाजुकडुन उजवीकडे विषम स्थानावरील अंकाची बेरीज करा.? 1 + 3 + 2 = 6

आता संख्येच्या डाव्या बाजुकडुन उजव्या बाजु कडे सम स्थानावरील अंकाची बेरीज करा.? 2 + 1 + 3 = 6

दोन्ही बेरीजाची वजाबाकी किती येते ? शुन्य यईल का नाही ते सांगा म्हुणन 123123 यासंख्येला 11 ने पुर्ण भाग जातो.

कोणतीही तीन अंकी संख्या घ्या तीन दोनदा लिहुन संख्या तयार करा. त्या संख्येला 11 ने भाग जातो.

प्रयत्न करा.

1. 789789 ला 11 ने भाग जातो का तपासणी करा.
2. 348348348348 ला 11 ने भाग जातो का ? तपासणी करा.
3. एक सम उलट सुलट कसाही वाचला तर समान येणारी संख्या घ्या. जसे 135531 आणि त्यास 11 ने भाग जातो का नाही ? तपासणी करा.
4. 1234321 ला 11 ने भाग जातो का ? तपासणी करा.

अभ्यास - 15.3

1. खालील दिलेल्या संख्यांना 6 ने भाग जातो किंवा नाही पडताळा ?

   (a) 273432 (b) 100533 (c) 784076 (d) 24684

2. खालील दिलेल्या संख्याना 4 ने पुर्ण भाग जातो किंवा नाही पडताळा ?

   (a) 3024 (b) 1000 (c) 412 (d) 56240

3. खालील दिलेल्या संख्याना 8 ने पुर्ण भाग जातो का नाही पडताळा ?

   (a) 4808 (b) 1324 (c) 1000 (d) 76728

SCERT TELANGANA

4. खालील दिलेल्या संख्याना 7 ने पुर्ण भाग जातो का नाही पडताळा ?

(a) 427 (b) 3514 (c) 861 (d) 4676

5. खालील दिलेल्या संख्याना 11 ने पुर्ण भाग जातो का नाही पडताळा ?

(a) 786764 (b) 536393 (c) 110011 (d) 1210121

(e) 758043 (f) 8338472 (g) 54678 (i) 13431

(j) 423423 (k) 168861

6. जर एखाद्या संख्येला 8 ने भाग जात असेल तर तीला 4 ने सुध्दा भाग जातो ? स्पष्ट करा.

7. 4A3 ही तीन अंकी संख्या 984 या संख्येत मिळविल्यास 13B7ही चार अंकी संख्या तयार होते. त्या संख्येला 11 ने पुर्ण भाग जातो तर (A + B) ची किंमत काढा.

15.2 आणखी काही विभाज्यता नियम

(a) चला आणखी काही विभाज्यता नियम पाहु या.

समजा 24 चा अवयव 12 आहे.

12 चे एकुण अवयव 1,2,3,4,6,12 आहेत.

चला 24 ला 2,3,4,6 ने भाग जातो का नाही पडताळुन बघा. 24 ला 12 चा पुर्ण अवयवांनी भाग जातो.

जर एखाद्या संख्येला दुसऱ्या संख्येने पुर्ण भाग जात असेल तर त्या च्या पुर्ण अवयवांनी सुध्दा भाग जातो. असे म्हणता येते.

(b) 80ही एक संख्या घ्या. 80 ला 4 ने आणि 5 ने पुर्ण भाग जातो. 80 ला $4 \times 5 = 20$ने सुध्दा भाग जातो. जिथे 4 आणि 5 सहमुळ संख्या आहेत. (4 आणि 5 ला सामाईक अवयव नाहीत.)

तसेच 60 ला 3 आणि 5 ने पुर्ण भाग जातो ज्यांना सामाईक अवयव नाहीत 60 ला $3 \times 5 = 15$ ने सुध्दा भाग जातो.

जर 'a' आणि bला सामाईक अवयव नसतील संख्याला 'a' आणि 'b' ने भाग जात असेल तर त्या संख्येला $a \times b$ने भाग जातो (जर'a' आणि 'b' सहमुळ संख्या असतील तर गुणधर्म तपासा).

(c) 16 आणि 20या दोन संख्या घ्या. या दोन्ही संख्याना 4 ने पुर्ण भाग जातो. $16 + 20 = 36$,बेरजेला सुध्दा 4 ने पुर्ण भाग जातो.

16 आणि 20 याच्या सामाईक भाजका सोबत असाच प्रयत्न करा.

अशाच आणखी संख्येच्या जोड्याची पडताळणी करा.

SCERT TELANGANA

जर दोन संख्येला एका संखेने भाग जात असेल तर त्या दोन संख्येच्या बेरजेला सुध्दा त्या एका संख्येने भाग जातो.

(d) 35 आणि 20या दोन्ही संख्याना 5 ने पुर्ण भाग जातो. 35 – 20 = 15 दोन संख्याच्या फरकाला 15 ने देखिल 5 ने भाग जातो.दुसऱ्या संख्येच्या जोडीला घेऊन असाच प्रयत्न करा.

कोणत्याही दोन संख्याला एका संख्येने भाग जात असेल तर दोन संख्येतील फरकाला सुध्दा संख्येने भाग जातो.

हे करा

1. वेगवेगळ्या संख्याच्या जोड्या घेऊन त्यासोबत वरील चार नियमाचा पडताळा पाडुन बघा
2. 144 ला 12 ने भाग जातो. 144 ला 12 च्या सर्व अवयवाने भागा जातो का ? सिध्द करा.
3. $2^3 + 2^4 + 2^5$ ला 2 ने भाग जातो पाडताळा पाडुन पहा ? सिध्द करा.
4. $3^3 - 3^2$ ला 3ने भाग जातो का पडताळा पाडुन पहा ? सिध्द करा

कोणतीही एक संख्या गृहीत धरुन तिच्या नंतरच्या दोन संख्याचा गुणाकार करा. जसे $4 \times 5 \times 6 = 120$ गुणाकारास 3 ने भाग जातो. कारण या क्रमवार तीन अंकापैकीएक अंक चा 3 चा गुणक आहे. अशा प्रकारे कोणत्याही तीन क्रमवार संख्यापैकी एक संख्या 3 चा गुणक असतो. म्हणुन तीन क्रमवार संख्याच्या गुणाकारास 3 ने भाग जातो.

प्रयत्न करा:

1. $1576 \times 1577 \times 1578$ ला 3 ने भाग जातो का नाही पडताळा करा.

मोठ्या संख्येसाठी 7 चा विभाज्यता नियम

आपण तीन अंकी संख्येसाठी 7 चा विभाज्यता नियम चर्चीला . जर तीन अंकी संख्येपक्षा मोठी संख्या असेल तर 7 ने विभाज्यता तपासणे सोपे आहे.

7538876849 ला 7 ने भाग जातो का नाही पडताळ करा.

पायरी 1 : संख्येला उजवीकडुन डावी कडे तीन तीन संख्येच्या गटात विभागणी करा जर शेवटचा गट 3 अंकापेक्षा कमी असेल तर त्यास एक गट समजा

7| 538| 876| 849|
D C B A

SCERT TELANGANA

पायरी 2 : एक गट सोडुन एक गटाची बेरीज करा जसे A + C आणि B + D.

$$\begin{array}{r} 849 \\ +\ 538 \\ \hline 1387 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 876 \\ +\ 7 \\ \hline 883 \\ \hline \end{array}$$

पायरी 3 : 883 मधुन 1387 वजा करा. 504 येईल आता 504 या तीन अंकी संख्येला 7 ने भाग जातो की नाही तपासा

$$\begin{array}{r} 1387 \\ -\ 883 \\ \hline 504 \\ \hline \end{array}$$

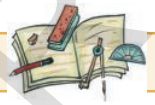
7 च्या विभाज्यतेच्या नियमानुसार 504 ला 7 ने भाग जातो म्हणुन दिलेल्या संख्येला 7 ने भाग जातो.

प्रयत्न करा :

1. 10 अंकी संख्या घेऊन 11 च्या विभाज्यता नियमाला वरच्या पध्दतीने पडताळा करा.

विभाज्यता नियमाच्या साह्याने एखाद्या संख्येमधील सुटलेला अंक माहित करता येतो. उदा.समजा 84763A9 या संख्येला 3 ने पुर्ण भाग जातो. संख्येतील अंकाची बेरीज करुन सुटलेला अंक माहित करु शकतो.

8 + 4 + 7 + 6 + 3 + A + 9 = 37 + A. 3 ने भाग जाण्यासाठी A ची किंमत 2 किंवा 5 किंवा 8 असली पाहिजे.



अभ्यास - 15.4

1. 25110 ला 45 ने भाग जातो का नाही तपासणी करा.
2. 61479 ला 81 ने भाग जातो का नाही तपासणी करा.
3. 864 ला 36ने भाग जातो का नाही तपासणी करा ? 864 ला 36च्या सर्व अवयवांनी भाग जातो काय ? सिध्द करा.
4. 756 ला 42 ने भाग जातो ? 756 ला 42 च्या सर्व अवयवांनी भाग जातो का सिध्द करा ?
5. 2156 ला 11 आणि 7 ने भाग जातो का नाही तपासणी करा ? 2156 ला 11 आणि 7 च्या गुणाकाराने भाग जातो का नाही ? तपासणी करा.
6. 1435 ला 5 आणि 7 ने भाग जातो काय ? 1435 ला 5 आणि 7 च्या गुणाकाराने भाग जातो काय ? सिध्द करा

SCERT TELANGANA

7. 456 आणि 618 ला 6 ने भाग जातो का ? 456 आणि 618 च्या बेरजेला 6 ने भाग जातो काय ? सिध्द करा.

8. 876 आणि 345 ला 3 ने भाग जातो का ? 876 आणि 345 च्या फरकाला 3 ने भाग जातो का ? तपासणी करा.

9. $2^2+2^3+2^4$ ला 2 किंवा 4 किंवा, 2 आणि 4 ने भाग जातो काय ? तपासणी करा.

10. 32^2 ला 4 किंवा 8 किंवा, 4 आणि 8 दोन्हीनेही भाग जातो काय ? तपासणी करा.

11. A679B ही एक 5 अंकी संख्या आहे. त्याला 72 ने भाग जातो तर 'A' आणि 'B'ची किंमत काढा ?

15.3 विभाज्यता नियमावर आधारीत काही कोडे :

राजु आणि सुधा मिळुन संख्येशी खेळ खेळत आहेत. त्या दोघातील संभाषन खालील प्रमाणे आहे.

सुधा म्हणाली मी तुला एक प्रश्न विचारते.

सुधा : एक, दोन अंकी संख्या गृहीत धर.

राजु : बरं, मी गृहीत धरलो (त्याने 75 गृहीत धरले)

सुधा : संख्येतील अंकांना अदलाबदल करुन नवी संख्या तयार कर.

राजु : बरं

सुधा : तु गृहीत धरलेल्या संख्येत ही नवी संख्या मिळवं

राजु : बरं, मिळवितो

सुधा : आता, तुझ्या उत्तराला 11 ने भाग तुला 0 शिल्लक राहील

राजु : होय, पण तुला कसे कळले ?

तुम्ही सांगु शकता का ? मला कसे कळाले ते ?

चला आता सुधाच्या कोड्यामागील तर्क समजावुन घेऊ या.

समजा राजुने $10a + b$ संख्या गृहीत धरली (जिथे दहम स्थानी "a" आहे आणि एकम स्थानी "b" आहे $a \neq 0$) त्याला $10 \times a + b = 10a + b$ लिहीता येते. तसेच या संख्येस उलट केल्यास $10b + a$ हीसंख्या बनते. या दोन संख्यांची बेरीज केल्यास त्याला $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ होते.

ही बेरीज नेहमी 11चा गुणक असते. जेव्हा तीने बेरजेला 11 ने भागीले तेव्हा भागाकार $(a + b)$येतो जो गृहीत धरलेल्या a आणि b च्या बेरजे ऐवढे असतो.

तुम्ही दुसरे कोणत्याही दोन संख्या घेऊन तपासणी करु शकता.

SCERT TELANGANA

हे करा :

1. जर खालील संख्या गृहीत धरल्यास निकाल माहित करा.

   (i) 37 (ii) 60 (iii) 18 (iv) 89

2. एका क्रिकेट संघात 11 खेळाडु आहेत. निवड समीतीने $10x + y$ इतके टि-शर्ट विकत घेतले. त्यांनी पुन्हा '$10y + x$ इतके टि-शर्ट विकत घेऊन खेळाडुना समान वाटले तर 11 खेळाडुंना वाटल्यास किती टी-शर्ट शिल्लक राहतील ? प्रत्येक खेळाडुला किती टि - शर्ट वाट्याला येतील ?

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

एक कोणतीही दोन अंकी संख्या गृहीत धरा. त्यातील अंकाची स्थानाची अदलाबदल करुन नवीन संख्या तयार करा. मोठ्या संख्येतुन लहान संख्या वजा करा. वजाबाकी नेहमी 9 ने भाग जातो काय ?

हे करा

1. एका टोपलीत '$10a + b$ फळे आहेत ($a \neq 0$ आणि $a > b$). त्यापैकी '$10b + a$ 'इतकी फळे नासली. उरलेली फळे 9 जनाला समान वाटले तर किती फळे शिल्लक राहीली. प्रत्येक जनाला किती फळे वाट्याला येतील?

15.4 तीन अंकी संख्यांशी खेळ

सुधा : आता, तीन अंकी संख्या गृहीत धरं

राजु : होय, बरं (तो 157गृहीत धरतो)

सुधा : संख्येतील अंकाच्या स्थानातील अदलाबदल करुन मोठ्या संख्येतुन लहान संख्या वजा करा.

राजु : बरं

सुधा : तुझ्या आलेल्या उत्तराला 9 किंवा 11 ने भाग दे. मला विश्वास आहे नक्की 0 शिल्लक राहतील.

राजु : होय, पण तुला कसे कळले ?

बरोबर, सुधाला कसे कळले ?

आपण 3 अंकी संख्येप्रमाणे 4 अंकी संख्येमागचे तर्क सुध्दा काढु शकतो $100a + 10b + c$.या संख्येच्या अंकाच्या क्रम बदल्यास $100c + 10b + a$

SCERT TELANGANA

जर $(a > c)$ दोन्ही संख्येमधील फरक $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$ $= 99a - 99c = 99(a - c) = 9 \times 11 \times (a - c)$

जर $(c > a)$ दोन्ही संख्येमधील फरक $(100c + 10b + a) - (100a + 10b + a)$

$= 99c - 99a = 99(c - a) = 9 \times 11 \times (c - a)$

आणि जर $a = c$, तेव्हा दोन्ही संख्येतील फरक '0' येईल.

वरील प्रत्येक संदर्भात आलेले उत्तर 99चे गुणक आहे 0 म्हणुन त्यासंख्येला 9 आणि 11 ने पुर्ण भाग जातो आणि त्याचा भागाकार $(a - c)$ किंवा $(c - a)$.

हे करा

1. वरील कृती खालील संख्येसोबत करुन पडताळा करा ?

   (i) 657 (ii) 473 (iii) 167 (iv) 135

प्रयत्न करा:

एखादी तीन अंकी संख्या घ्या. त्यातील अंकाची अदलाबदल करुन नवीन संख्या तयार करा. जसे (ABC, BCA, CAB) आता,या तीन अंकी संख्याची बेरीज करा. व कोणत्या संख्येने तीला भाग जातो ?

15.5 सुटलेल्या अंकाचे कोडे:

अंकगणितीय बेरजेमध्ये संख्येच्या अंकाच्या जागी इंग्रजी अक्षर घेऊन अंकाचे कोडे तयार करु शकतो. ज्यामध्ये कोणते अक्षर कोणता अंक दर्शवितो माहित करायचे असते. चला काही बेरजेचे आणि वजाबाकीचे प्रश्न सोडवु या.

कोडे सोडविण्याच्या तीन अटी आहेत.

1. एक अक्षर फक्त एकाच अंकासाठी वापरावे एक अंक एकाच अक्षरासाठी वापरावे
2. संख्येत सर्वाधीक किंमतीच्या स्थानी शुन्य अंक असु नये
3. कोड्यास फक्त एकच उत्तर असले पाहिजे.

उदाहरण 6: खालील बेरजेत A ची किंमत काढा

$$\begin{array}{r} 17A \\ +\ 2A4 \\ \hline 407 \\ \hline \end{array}$$

SCERT TELANGANA

सोडवणुक : वरील बेरीज पाहता $A + 4 = 7$ आहे

म्हणुन $A = 3$

$173 + 234 = 407$

किंवा $100 + 70 + A$

$200 + 10A + 4$

$300 + 70 + 11A + 4 = 407$

$11A = 33$

$A = 3$

उदाहरण 7 : $Y + Y + Y = MY$ मध्ये M आणि Y ची किंमत काढा.

सोडवणुक : $Y + Y + Y = MY$

$3Y = 10M + Y$

$2Y = 10M$

$M = \frac{Y}{5}$ (म्हणजेच Y ला 5ने भाग जातो म्हणुन $Y = 0$ किंवा 5)

वरील प्रमाणे, जर $Y = 0$, $Y + Y + Y = 0 + 0 + 0 = 0$, $M = 0$

जर $Y = 5$, $Y + Y + Y = 5 + 5 + 5 = 15$, $MY = 15$ म्हणुन $M = 1, Y = 5$

उदाहरण 8: $A2 - 15 = 5A$ मध्ये A2 आणि 5A दोन अंकी संख्या आहेत तर A काढा

सोडवणुक : $2 - 5 = a$ हे शक्य आहे किंवा $(10A + 2) - (10 + 5) = 50 + A$

जेव्हा $12 - 5 = 7$,

म्हणुन $A = 7$

$10A - 13 = 50 + A$

$9A = 63$

$A = 7$

उदाहरण 9: $5A1 - 23A = 325$ मध्ये 5A1 आणि 23A तीन अंकी संख्या आहेत तर A काढा

सोडवणुक : $1 - A = 5$?

म्हणजे $11 - A = 5$,

म्हणुन $A = 6$

किंवा $(500 + 10A + 1) - (200 + 30 + A) = 325$

$501 - 230 + 10A - A = 325$

$271 + 9A = 325$

$271 + 9A = 325$

$271 - 271 + 9A = 325 - 271$

$9A = 54$

$A = 6$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 10: $1A \times A = 9A$ मध्ये 1A आणि 9A दोन अंकी संख्या आहेत तर A काढा

सोडवणुक : $A \times A = A$ किंवा $(10+A)A = (90+A)$

1, 5, 6 चे वर्ग पाढे

$1 \times 1 = 1,$

$5 \times 5 = 25,$

$6 \times 6 = 36,$

जर $A = 6,$

$16 \times 6 = 96$

$$10A + A^2 = 90 + A$$

$$A^2 + 9A - 90 = 0$$

$$A^2 + 2.A\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 90 = 0$$

$$\left(A + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - 90 = 0$$

$$\left(A + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}$$

$$A + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$$

$$A = \frac{12}{2} = 6$$

उदाहरण 11 : $BA \times B3 = 57A.$ मध्ये BA आणि B3 दोन अंकी संख्या आहेत, 57A तीन अंकी संख्या आहे तर A आणि B काढा

सोडवणुक : वरील उदाहरणात आपण चुका व प्रयत्न पध्दतीने पाढ्याच्या साह्याने संख्येतील अंकाना ओळखु शकतो. एक स्थानी $A \times 3 = A.$ साठी $A = 0$ किंवा 5,गुणाकाराचा एकक अंक सारख्या होतो.म्हणुन A ची किंमत 0 किंवा 5आहे. जर दशक स्थानी 1 घेतले तर संख्येची अत्याधीक किंमत 19 होते. या संख्येचा गुणाकार $19 \times 19 = 361$येतो. तो 500 पेक्षा लहान आहे. तसेच जर दशक स्थानी 3 घेतले तर दोन्ही संख्येची उत्यल्प किंमत $30 \times 30 = 900$ होईल जी 500 पेक्षा मोठी आहे. म्हणुन दशक स्थानी 2 असेल तेव्हा $20 \times 23 = 460$ किंवा $25 \times 23 = 575.$ म्हणुन आवश्यक उत्तर $25 \times 23 = 575$ आहे.

हे करा :

1. जर 21358AB ला 99 ने पुर्ण भाग जातो तर A आणि B ची किंमत काढा.
2. 4AB8 मध्ये (A आणि B अंक आहेत) A आणि B ची किंमत काढा. जेणे करुन 2,3,4,6,8 आणि 9 ला पुर्ण भाग जाईल.

उदाहरण 12: खालील दिलेल्या गुणाकराची किंमत काढा.

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 5 \\ \hline CAB \end{array}$$

सोडवणुक: जर $B = 0$ किंवा 1 किंवा 5 तेव्हा $0 \times 5 = 0,\ 1 \times 5 = 5,\ 5 \times 5 = 25$

जर $B = 0$, तेव्हा $A0 \times 5 = CA0$

SCERT TELANGANA

जर A = 5 , तेव्हा 50 × 5 = 250

∴ CAB = 250 .

प्रयत्न करा:

1. जर YE × ME = TTT तर Y + E + M + T ची किंमत काढा.

   [सुचना : TTT = 100T + 10T + T = T(111) = T(37 × 3)]

2. जर 88 वस्तुची किंमत A733B आहे तर A आणि B ची किंमत काढा.

अभ्यास -15. 5

1. खालील बेरजेत सुटलेले अक्षर लिहा.

(a)
```
   111
+    A
+   77
-----
   197
```

(b)
```
   222
+    8
+   BB
-----
   285
```

(c)
```
   AAA
+    7
+   AA
-----
   373
```

(d)
```
   2222
+    99
+     9
   AAA
-----
  299A
```

(e)
```
+    BB
      6
   AAA
-----
   461
```

2. खालील प्रश्नातील A ची किंमत काढा.

   (a) 7A – 16 = A9 (b) 107 – A9 = 1A (c) A36 – 1A4 = 742

3. खालील प्रश्नातील अक्षराची किंमत काढा.

(a)
```
   [D][E]
   × 3
-------
[F][D][E]
```

(b)
```
   [G][H]
   × 6
-------
[C][G][H]
```

4. खालील प्रश्नातील अक्षरा ठिकाणी योग्य अंक बसवा

   (a) 73K ÷ 8 = 9L (b) 1MN ÷ 3 = MN

5. जर ABB × 999 = ABC123 (जेथे A, B, C अंक आहेत) तर A, B, C ची किंमत काढा.

15.6 स्थान किंमत

या पध्दतीत दिलेल्या संख्येने स्थान किंमतीला भागाकार करुन शिल्लक संख्या मिळवितो. जर आपण स्थान किंमतीला 7 ने भागाकार केले तर खालील प्रमाणे अंक शिल्लक राहतील.

1000 ÷ 7 (6शिल्लक राहील्यास 6 – 7 = –1 असे घेता येते)

100 ÷ 7 (2शिल्लक राहील्यास)

10 ÷ 7 (3शिल्लक राहील्यास)

1 ÷ 7 (1शिल्लक राहील्यास)

SCERT TELANGANA

स्थान किंमत	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
7 ने भागाकार केल्याने राहीलेली संख्या	3	2	1	–2	–3	–1	2	3	1

समजा जर, 562499 ला 7 ने भाग जातो का नाही पडताळुन घ्याचे आहे.

अंक	5	6	2	4	9	9
स्थान किंमत	5×10^5	6×10^4	2×10^3	4×10^2	9×10^1	9×10^0
7 ने भागाकार केल्याने राहीलेली संख्या	$5\times(-2)$	$6\times(-3)$	$2\times(-1)$	4×2	9×3	9×1

अंकाच्या मुळ किंमतीच्या गुणाकाराची बेरीज आणि स्थान किंमतीला 7 ने भागाकार केल्यावर शिल्लक राहीलेली संख्या खालील प्रमाणे आहे. $-10-18-2+8+27+9=-30+44=14$

(7 ने भाग जातो) म्हणुन 562499 ला 7 ने पुर्ण भाग जातो.

हे करा :

1. वरील पध्दतीचा वापर करुन 7810364 ला 4 ने भाग जाते किंवा नाही तपासुन पहा.
2. वरील पध्दतीचा वापर करुन 963451 ला 6 ने भाग जाते किंवा नाही तपासुन पहा.

15.7 विभाज्यता नियमावर आधारीत आणखी काही प्रश्न

उदाहरण 13: उलटसुलट कसीही वाचला तरी सारखी प्रत्येक सम संख्येला 11 ने भाग जातो काय ?

सोडवणुक: समजा 12344321. ही एक सम संख्या आहे यातील विषम स्थाना वरील अंकाची बेंरीज $1+3+4+2$. यातील फरक 0 येतो. म्हणुन $2+4+3+1$ ला 11 ने भाग जातो.

उदाहरण 14: 10^{1000}-1 9 आणि 11 दोन्ही ने भाग जातो काय ?

सोडवणुक: चला 10^{1000}-1 ला 999 .... 999 (1000वेळा) लिहु. सर्वस्थानी 9 ही अंक आहे. म्हणुन यास 9 ने भाग जातो. आणि यात 1000 अंक आहेत. समस्थानावरील अंकाची व विषम स्थानावरील अंकाची बेरीज करुन बेरजेची वजाबाकी केल्यास शुन्य येते. म्हणुन 9 आणि 11 ने पुर्ण भाग जातो.

विचार करा, चर्चा करुन लिहा.

1. 10^{2n}-1 ला 9 आणि 11 ने भाग जातो का ? स्पष्ट करा.
2. 10^{2n+1}-1 ला 11 ने भाग जातो का. स्पष्ट करा.

SCERT TELANGANA

उदाहरण 15: कोणत्याही दोन अंकी संख्या घ्या. तीला तीनदा लिहुन 6 अंकी संख्या. बनवा अता त्या संख्येला 3 ने भाग जातो काय तपासणी करा ?

सोडवणुक: 47ही दोन अंकी संख्या घेतली. तीला तिन वेळा लिहुन 474747 ही अंकी 6 अंकी संख्या तयार झाली.

474747 ला 47(10101). 10101 असेही लिहिता येते. 10101 ला 3 ने पुर्ण भाग जातो. कारण संख्येच्या अंकाची बेरीज $1 + 1 + 1 = 3$. म्हणुन 474747 ला 3 ने पुर्ण भाग जातो.

उदाहरण 16: कोणतीही 3 अंकी संख्या घेऊन तीला दोनदा लिहिल्यास 6 अंकी संख्या तयार होईल. या संख्येला 7 आणि 11 ने भाग जातो की नाही तपासणी करा.

सोडवणुक: समजा 345ही तीन अंकी संख्या घेतली तीला 6 अंकी संख्या बनविण्यासाठी दोनदा लिहिले 345345 संख्या येते.

345345 ला खालील प्रमाणे लिहिता येते. $345345 = 345000 + 345 = 345 (1000 + 1)$

$= 345 (1001)$

$= 345 (7 \times 11 \times 13)$

म्हणुन 345345 ला 7,11 आणि 13 ने सुध्दा भाग जातो.

प्रयत्न करा.

1. 456456456456 7,11 आणि 13 ने भाग जातो काय तपासा ?

उदाहरण 17: कोणताही 3 अंकी समान अंक असलेली संख्या घ्या. तिला तिच्या बेरजेने तयार झालेल्या लहान संख्येने भागाकार करा. तुम्हाला काय दिसुन येईल ?

सोडवणुक: 444 ही तिन अंकी संख्या घेतली.444 च्या अंकाची बेरीज केल्यास $4 + 4 + 4 = 12$ ही संख्या मिळाली

आता 444 ला12 ने भागा $444 \div 12 = 37$. अशाच प्रकारची क्रिया आणि 333 , 666 संख्येसोबत करा, तुम्हाला नक्कीच

37 हा भागाकार येईल.

उदाहरण 18: $2^3 + 3^3$ ला $(2 + 3)$ ने भाग जातो का ?

सोडवणुक: आपणास माहित आहे की $a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$.

So $2^3 + 3^3 = (2 + 3) (2^2 - 2 \times 3 + 3^2)$. चा गुणक आहे. $(2 + 3)$.

म्हणुन $2^3 + 3^3$ ला $(2 + 3)$ ने भाग जातो.

विचार करुन चर्चा करा.:

1. $a^5 + b^5$ ला $(a + b)$ ने भाग जातो, 'a' आणि 'b' च्या ठिकाणी वेगवेगळ्या नैसर्गिक संख्या ठेऊन तपासणी करा.?

2. $(a^{2n+1} + b^{2n+1})$ ला $(a + b)$ ने भाग जातो का स्पष्ट करा?

SCERT TELANGANA

15.8 क्रमवार संख्येची बेरीज करणे :

1 to 100 पर्यंच्या कोणत्याही क्रमवार संख्येची बेरीज, बेरीज न करता, करता येते.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 98 + 99 + 100$

$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) \ldots\ldots (50 + 51)$

$= 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ अशा 50 जोड्या आहेत $= 50 \times 101 = 5050$

यालाच $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$ लिहिता येते.

तसेच 48 संख्याची बेरीज किती येते ? यात तुम्हाला काय दिसुन येते ?

जर एकुण 'n' संख्याची बेरीज किती येईल

उदाहरण 19: 50 ते 85 मधील 5 ने पुर्ण भाग जाणाऱ्या पुर्णांक संख्येची बेरीज करा.

Solution: 50 ते 85 पर्यतच्या 5 ने भागजाणाऱ्या संख्येची बेरीज = (1 ते 85 पर्यंतच्या 5 ने पुर्ण भाग जाणाऱ्या संख्याची बेरीज) – (1ते49 पर्यंतच्या 5 ने पुर्ण भाग जाणाऱ्या संख्यांची बेरीज)

$= (5 + 10 + \ldots + 85) - (5 + 10 + \ldots + 45)$

$= 5(1 + 2 + \ldots + 17) - 5(1 + 2 + \ldots + 9)$

$\frac{n(n+1)}{2}$

$= 5 \times \left(\frac{17 \times \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}}\right) - 5 \times \left(\frac{9 \times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}\right)$

$= 5 \times 9 \times 17 - 5 \times 9 \times 5$

$= 5 \times 9 \times (17 - 5)$

$= 5 \times 9 \times 12 = 540$

उदाहरण 20: 1 ते 100 पर्यंतच्या 2 आणि 3 ने भाग जाणाऱ्या संख्यांची बेरीज माहित करा.

सोडवणुक: 1 ते 100 पर्यत 2 ने भाग जाणाऱ्या संख्या 2, 4, ... 98, 100 आहेत.

1 ते 100 पर्यंत 3 ने भाग जाणाऱ्या संख्या 3, 6, ... 96, 99 आहेत.

वरच्या दोन श्रेणीत काही संख्या दोनदा आल्या आहेत.त्या संख्या म्हणजे 6 चे गुणक म्हणजेच 2 आणि 3 ची ल.सा.वी.

1 ते 100 पर्यंतच्या 2 ने किंवा 3 ने भाग जाणाऱ्या पुर्णांक संख्याचे बेरीज = (1 ते 100 पर्यंतच्या 2 ने भाग जाणाऱ्या पुर्णांक संख्येची बेरीज) + (1 ते 100 पर्यंच्या 3 ने भाग जाणाऱ्या पुर्णांक संख्याची बेरीज) – (1 ते 100 पर्यंतच्या 6 ने भाग जाणाऱ्या पुर्णांक संख्या बेरीज)

$= (2 + 4 + \ldots + 100) + (3 + 6 + \ldots + 99) - (6 + 12 + \ldots 96)$

$= 2(1 + 2 + \ldots + 50) + 3(1 + 2 + \ldots + 33) - 6(1 + 2 + \ldots + 16)$

$= 2 \times \left(\frac{50 \times (50+1)}{2}\right) + 3 \times \left(\frac{33 \times (33+1)}{2}\right) - 6 \times \left(\frac{16 \times (16+1)}{2}\right)$

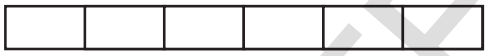
SCERT TELANGANA

$$= \cancel{2} \times \left(\frac{50 \times 51}{\cancel{2}}\right) + 3 \times \left(\frac{33 \times \cancel{34}^{17}}{\cancel{2}}\right) - 6 \times \left(\frac{{}^{8}\cancel{16} \times 17}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 2550 + 1683 - 816$$

$$= 4233 - 816 = 3417$$

अभ्यास – 15.6

1. 1 ते 100 पर्यंतच्या 5 ने भाग जाणाऱ्या पुर्णांक संख्याची बेरीज करा.
2. 11ते 50 पर्यंतच्या 2 ने भाग जाणाऱ्या पुर्णांक संख्याची बेरीज करा.
3. 1 ते50 पर्यंतच्या 2 आणि 3 ने भाग जाणाऱ्या पुर्णांक संख्यांची बेरीज करा.
4. $(n^3 - n)$ ला 3 ने भाग जातो. कारण स्पष्ट करा.
5. क्रमवार 'n' इतक्या विषम संख्यांची बेरजेला 'n'ने भाग जातो. कारण स्पष्ट करा.
6. $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11}$ ला 5 ने भाग जातो काय ? स्पष्ट करा.
7. 

   दिलेल्या आकृतीतील एकुण आयताची संख्या किती ?
8. राहुलचे वडील त्याच्या प्रत्येक वाढदिवशी काही रक्कम जमा करतात. पहिल्या वाढदिवशी 100 रुपये दुसऱ्या वाढदिवशी 300 रुपये, तिसऱ्या वाढदिवशी 600 रुपये, चौथ्या वाढदिवशी 1000 रुपये जमा करतात तर राहुलच्या वडीलांनी त्याच्या15 व्या वाढदिवसापर्यंत किती रक्कम जमा केली आहे.
9. 1 ते 100 पर्यंतच्या 2 किंवा ने भाग जाणाऱ्या संख्यांची बेरीज किती.
10. 11 ते1000 पर्यंतच्या 3 ने भाग जाणाऱ्या संख्यांची बेरीज किती.

आपण काय चर्चा केली ?

1. तीन अंकी संख्येला लिहिने व तिला विस्तृत रुपात लिहिणे.
   $100a + 10b + c$. जिथे a, b, c digits $a \neq 0$, b, c हा अंक 0 ते 9 पर्यंतचा आहे.
2. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 यांच्या विभाज्यता परिक्षणाचा तर्क काढणे. 2 किंवा 3 अंकी संख्येच्या साधारणा रुपात.
3. 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10, 11 च्या विभाज्यता नियमामागचा तर्क माहित करणे.
4. संख्या कोडे व खेळ

SCERT TELANGANA

उत्तरे

1. परिमेय संख्या

अभ्यास - 1.1

I.

(i) बेरजेचा अविकारक

(ii) वितरणाचा नियम

(iii) गुणाकाराचा अविकाराक

(iv) गुणाकाराचा अविकारक

(v) संवृत्ततेचा गुणधर्म

(vi) गुणाकाराचा संवृततेचा गुणधर्म

(vii) बेरजेचा व्यस्त गुणधर्म

(viii) गुणाकाराचा व्यस्त

(ix) वितरणाचा नियम

2. (i) $\frac{3}{5}, \frac{-5}{3}$ (ii) $-1, 1$ (iii) 0, व्याख्याकरता येत नाही (iv) $\frac{-7}{9}, \frac{9}{7}$

(v) $1, -1$

3. (i) $\frac{-12}{5}$ (ii) 0 (iii) $\frac{9}{11}$ (iv) $\frac{6}{7}$

(v) $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ (vi) 0 4. $\frac{-28}{55}$

5. गुणाकाराचा सहचर्य नियम, गुणाकाराचा व्यस्त, गुणाकाराचा अविकार, बेरजेचा संवृत्तेचा गुणधर्म

7. $\frac{28}{15}$ 8. (i) $\frac{-5}{12}$ (ii) $\frac{58}{13}$ (iii) $\frac{45}{7}$

9. $\frac{-7}{8}$ 10. $\frac{53}{6}$

11. सहचर्य गुणधर्म नाही कारण $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

13. (i) नैसर्गिक संख्या (ii) 0 (iii) ऋण

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 1.3

1. (i) $\frac{57}{100}$ (ii) $\frac{22}{125}$ (iii) $\frac{100001}{100000}$ (iv) $\frac{201}{8}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{19}{33}$ (iii) $\frac{361}{495}$ (vi) $\frac{553}{45}$

3. (i) $\frac{7}{13}$ (ii) $\frac{-7}{5}$

4. $\frac{-62}{65}$ 5. 140 6. $5\frac{1}{10}$m 7. ₹. 1.66

8. $161\frac{1}{5}m^2$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. $\frac{16}{9}$m 11. 125

2. एका चलातील रेषीय समीकरणे

अभ्यास - 2.1

1.(i) 2 (ii) –3 (iii) –6 (iv) 6

(v) $\frac{-3}{2}$ (vi) –21 (vii) 27 (viii) 5

(ix) $\frac{7}{3}$ (x) 1 (xi) $\frac{1}{2}$ (xii) 0

(xiii) $\frac{25}{7}$ (xiv) $\frac{21}{16}$ (xv) $\frac{8}{3}$ (xvi) $\frac{13}{6}$

अभ्यास - 2.2

1.(i) 67^0 (ii) 17^0 (iii) 125^0 (iv) 19^0

(v) 20^0

2. 5,13 3. 43, 15 4. 27, 29

5. 252, 259, 266 6. 20 की.मी. 7. 99ग्रॅम, 106ग्रॅम, 95ग्रॅम 8. 113मी, 87मी

9. 16मी, 12मी 10. 21मी, 21मी, 13मी

11. $39^0.51^0$ 12. 20 वर्ष, 28 वर्ष

13. 126 14. 80, 10 15. 60, 48 16. 59 फीट, 29.5 फीट

17. 186, 187.

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 2.3

1. 1 2. 2 3. $\frac{11}{4}$ 4. -1

5. $\frac{-9}{5}$ 6. 1 7. 7 8. $\frac{-4}{7}$

9. $\frac{9}{2}$ 10. $\frac{11}{3}$ 11. 1 12. -96

13. 3 14. 8

अभ्यास - 2.4

1. 25 2. 7 3. 63 4. 40, 25, 15

5. 12 6. 4, 2 7. 16 8. 10,000

अभ्यास - 2.5

1.(i) $\frac{145}{21}$ (ii) 168 (iii) 12 (iv) 25

(v) $\frac{127}{12}$ (vi) 1 (vii) $\frac{9}{2}$ (viii) $\frac{5}{12}$

(ix) $\frac{9}{23}$ (x) -1 (xi) $\frac{-1}{7}$ (xii) $\frac{3}{7}$

2. 30 3. 48,12 4. $\frac{3}{7}$ 5. 50, 51, 52

6. 25 7. 5 8. एक रुपया : 14 पैसे; 50 पैशाचे नाणे = 42

9. 30 दिवस 10. 20 कि.मी. 11. 36

12. 860 रुपये 13. 16

4. घातांक आणि घात

अभ्यास - 4.1

1.(i) $\frac{1}{64}$ (ii) -128 (iii) $\frac{64}{27}$ (iv) $\frac{1}{81}$

2.(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ (ii) $(-2)^{14}$ (iii) 5^4 (iv) 5^5 (v) $(-21)^4$

3.(i) $2^4 \times 3$ (ii) $\frac{1}{2}$

SCERT TELANGANA

4.(i) 10 (ii) 40^3 (iii) $\frac{13}{16}$ (iv) $\frac{2}{81}$

(v) $\frac{17}{6}$ (vi) $\frac{16}{81}$ 5. (i) 625 (ii) 625

6.(i) 10 (ii) –10 (iii) 2 7. 3

8. $\frac{4^5}{3^4 \times 5}$ 9. (i) 1 (ii) 72 (iii) –24 (iv) 1

10. $\frac{16}{49}$

अभ्यास - 4.2

1.(i) 9.47×10^{-10} (ii) 5.43×10^{11} (iii) 4.83×10^{7} (iv) 9.298×10^{-5}

(v) 5.29×10^{-5}

2.(i) 4,37,000 (ii) 5,80,00,000 (iii) 0.00325 (iv) 37152900

(v) 0.03789 (vi) 0.02436

3.(i) 4×10^{-7} m (ii) 7×10^{-6} mm (iii) 3×10^{8} m/sec (iv) 3.84467×10^{8} m^2

(v) $1.6 \text{ X } 10^{-19}$ coulombs (vi) 1.6×10^{-3} cm (vii) 5×10^{-6} cm

4. 1.0008×10^2 मी.मी.

5.(i) नाही (ii) नाही (iii) नाही (iv) नाही (v) नाही

5. गुणोत्तराचा वापर करुन राशींची तुलना करा.

अभ्यास - 5.1

1.(i) 3:4 (ii) 32:3 (iii) 1:2 2. (i) 168

3. 8 4. 48 5. 20 6. $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$

7. 3:5 8. 4 : 7 9. 8320 रूपये

10. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, होय 11. ₹. 28.5, ₹. 92, ₹. 257.6, ₹. 132, ₹. 88

12. (a) 83 (b) 1992 सदस्य 13. 2064 बॅग 14. 70 से.मी.

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 5.2

1. 81.9 करोड 2. 2756.25 3. ₹. 7.67 4. 3 × 6से.मी.

5. 127.50 ₹. 6. $6\frac{1}{4}$% 7. 17%

8. 880 ₹. 10%, 4,000, 20%, 10,000, 20%, नफा, 392, 42 ₹., 315 ₹., 35 ₹.

9. 2244 ₹. 10. 1400 11. 40,000, 12.5%

12. नफा 30,000 17.65% लाभ 13. 1334 ₹. 14. i)10000 ₹. ii) 3000 ₹. iii) 200 ₹. 15. i) 46.08 ₹. ii) 33.33 ₹. 16. 13

अभ्यास - 5.3

1. (a) 312 रु. (b) 10,575 2. 19,950 3. A = ₹8820, ₹820

4. ₹7234.50 5. 86950, 1450 6. 81,82,199 7. 1080.50

8. (i) 400 (ii) 610 9. ₹.43.20 10. 5,31,616

11. 36659.70 12. 561.60 13. 9500 14. 1297920

15.103.81

6. वर्गमुळ आणि घनमुळ

अभ्यास - 6.1

1.(i) 39 च्या वर्गाच्या एकक स्थानी 1 आहे (ii)297 च्या वर्गाच्या एकक स्थानी 9 आहे

(iii) 5125 च्या वर्गाच्या एकक स्थानी 5 आहे (iv)7286 च्या वर्गाच्या एकक स्थानी 6 आहे

(v) 8742 च्या वर्गाच्या एकक स्थानी 4 आहे

2. खालील पुर्ण संख्या पुर्ण वर्ग आहेत.

(i) 121 (ii) 256

3.(i) 257 च्या एकक अंक 7 आहे. म्हणुन तो पुर्ण वर्ग नाही.

(ii) 4592 च्या एकक अंक 2 आहे. म्हणुन तो पुर्ण वर्ग नाही.

(iii) 2433 च्या एकक अंक 3 आहे. म्हणुन तो पुर्ण वर्ग नाही.

(iv) 5050 च्या एकक अंक 0 आहे. आणि संख्येच्या शेवटी फक्त एकक आहेत म्हणुन तो पुर्ण वर्ग नाही.

(v) 6098 च्या एकक अंक 8 आहे. म्हणुन तो पुर्ण वर्ग नाही.

4. (i) 431^2 - विषम (ii) 2826^2 - सम (iii) 8204^2 - सम (iv)17779^2 - विषम

(v) 99998^2 - सम

SCERT TELANGANA

5. (i) 50 (ii) 112 (iii) 214

6. (i) 25 (ii) 81 (iii) 169

अभ्यास - 6.2

1. (i) 21 (ii) 28 (iii) 64 (iv) 84

2. 5 3. 6. 120 4. 6 5. 39

6. 51 7. 144, 9 8. 89 9. 4608 m^2

अभ्यास - 6.3

1. (i) 33 (ii) 48 (iii) 88 (iv) 78
   (v) 95

2. (i) 1.6 (ii) 4.3 (iii) 8.3 (iv) 9.2

3. 31 4. 67 सें.मी. 5. 91 6. 1024

7. 149 8. (i) 10 (ii) 16 (iii) 28

अभ्यास - 6.4

1. (i) 512 (ii) 4096 (iii) 9261 (iv) 27000

2. i) 243 - पुर्ण घन नाही ii) 516 - पुर्ण घन नाही
   iii) 729 - पुर्ण घन आहे vi) 8000 - पुर्ण घन आहे.
   v) 2700 - पुर्ण घन नाही

3. 2 4. 17 5. 5 6. 288 7. 2

अभ्यास - 6.5

1. (i) 7 (ii) 9 (iii) 11 (iv) 14

1. (i) 16 (ii) 13 (iii) 15 (iv) 18

3. i) चुक ii) चुक iii) सत्य
   vi) बरोबर v) चुक vi) चुक 4. 64

7. वारंवारता वितरण सारणी आणि आलेख

अभ्यास 7.1

1. ₹.11060.83 2. $\bar{x} = 7$ 3. $\bar{x} = 27$ 4. $\bar{x} = 43$

5. $\bar{x} = 30$ वर्ष 6. 52 वर्ष

7. $\bar{x} = 12$ विचलनाची बेरीज $\bar{x} = 0$ पासुन

SCERT TELANGANA

8. 5
9. $\bar{x} = 13.67$ सर्व संदर्भात सारखेच
10. 15.3 गुण
11. $\bar{x} = 30$
12. मध्यमा = 3.4
13. $x = 18$
14. बहुलुक = 10
15. बहुलुक = $x - 3$
16. बहुलुक = 1
17. 12, 16, 16, 16
18. 42
19. 8
20. 20

अभ्यास - 7.2

1.

वर्ग अवकाश	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64
वारंवारता	9	9	9	6	7	5

2.

विद्यार्थ्यांची संख्या	15-19	19-23	23-27	27-31	31-35	35-39	39-43
वारंवारता	5	7	6	5	5	1	1

3.

वर्ग अवकाश	4-11	12-19	20-27	28-35	36-43	44-51	52-59
मर्यादा	3.5-11.5	11.5-19.5	19.5-27.5	27.5-35.5	35.5-43.5	43.5-51.5	51.5-59.5

4.

वर्ग गुण	संचीत वारंवारता	संचीत वर्ग अवकाश	पेक्षा कमी	पेक्षा जास्त
10	6	4-16	6	75
22	14	16-28	20	69
34	20	28-40	40	55
46	21	40-52	61	35
58	9	52-64	70	14
70	5	64-76	75	5

5.

वर्ग अवकाश	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
मुलांची संख्या	2	10	4	9	10

6.

वर्ग अवकाश (वय)	वारंवारता (मुलांची संख्या)	वर्ग मर्यादा	संच संख्येपेक्षा पेक्षा लहान	संचित संख्यपेक्षा मोठा
1 - 3	10	0.5 - 3.5	10	59
4 - 6	12	3.5 - 6.5	22	49
7 - 9	15	6.5 - 9.5	37	37
10 - 12	13	9.5 - 12.5	50	22
13 - 15	9	12.5 - 15.5	59	9

SCERT TELANGANA

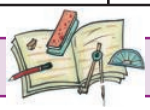
7.

वर्ग अवकाश	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
संचित वारंवारता	3	8	19	25	30
वारंवारता	3	5	11	6	5

दिलेल्या वारंवारता संचित वारंवारतेपेक्षा लहान आहेत.

8.

वर्ग अवकाश	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
G.Cu fr	42	36	23	14	6
संचित वारंवार	6	13	9	8	6



8.भुमीतीय आकृत्यांचा शोध लावणे

अभ्यास - 8.1

1. (a) सत्य (b) असत्य (c) असत्य (d) असत्य (e) असत्य (f) असत्य (g) असत्य
2. (a) होय, कोणत्याही दोन आकृत्या सारख्या असतात.

   (b) होय, कोणत्याही दोन आकृत्या सारख्या असतात.
3. AB = NM; $\angle A = \angle N$ BC = MO; $\angle B = \angle M$

   CA = ON; $\angle C = \angle O$
4. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य
7. 1.5 m, 3m, 4.5m, 6m, 7.5m, 9m
8. 9m

अभ्यास - 8.1

I. (i) 11 (ii) 10 (iii) 4 (iv) 0 (v) 0 (vi) H, I, O, X

9. प्रतलिय आकृत्यांचे क्षेत्रफळ

अभ्यास 9.1

2. (i) 20 चौ.से.मी. (ii) 424 चौ.से.मी. (iii) 384 चौ.से.मी.
3. 96 चौ.से.मी. 4. 96 चौ.से.मी. 5. (i) 10700 चौ.मी. (ii) 10650 चौ.मी.
6. (ii) x = 75 सें.मी., 45 से.मी.
7. 675 सें.मी.^{2}, 4050 रु.
8. 337.5 चौ.से.मी.

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 9.2

1. 361 चौ.से.मी. 2. 616 चौ.से.मी.

3. (i) 693 चौ.से.मी. (ii) 259.87 सें.मी.^{2}

4. 5544 से.मी.^{2} 5. 308 सें.मी.^{2} 6. 10.5 से.मी.^{2} 7. 7.868 से.मी.^{2}

8. (i) $\frac{6}{7}a^2$ (ii) 123.5 से.मी.^{2} 9. 6.125 से.मी.^{2} 10. 346.5 मी.^{2}

10. सम आणि व्यस्त प्रमाण

अभ्यास 10.1

1. 84, 168, 420, 546 2. 32, 56, 96, 160 3. 12,600/- 4.2,100/-

5. 21 से.मी 6. 6मी., 8.75 मी 7. 168 की.मी. 8. 5000

9. 25कि.मी., $\frac{10}{3}$ तास 10. $\frac{9}{20}$ से.मी.

अभ्यास - 10.2

1. (iii) 2. 120, 80

अभ्यास - 10. 3

1. 4 कि.ग्रा. 2. 50 दिवस 3. 48 4. 4

5. 4 6. 15 7. 24 8. 60मी. 9. 40% 10. $\frac{(x+1)^2}{x+2}$ दिवस^3

अभ्यास - 10. 4

1.540 रुपये 2. 2 दिवस 3.16दिवस 4.325 माणसे 5.36 दिवस

11. बैजीक पदावली

अभ्यास - 11.1

1. (i) 42K (ii) $6lm$ (iii) $15t^4$ (iv) 18mn

(v) $10p^3$

3. $60a^2c$

$24m^3n$

$36\,k^3l^3$

$24p^2q^2r^2$

4. i) $x^5\,y^3$ ii) a^6b^6 iii) $k^3l^3m^3$ iv) $p^2q^2r^2$

v) $72a^2bcd$ 5. $x^2y^2z^2$ 6. X^3Y

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 11.2

1. (ii) $3k^2l + 3kl m + 3kmn$ (iii) $a^2b^2 + ab^4 + ab^2c^3$
   (iv) $x^2yz - 2xy^2z + 3xyz^2$ (v) $a^4b^3c^3 + a^2b^4c^3d - a^3b^3c^2d^2$
2. $12y^2 + 16y$
3. i) -2 ii) 0
4. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
5. $x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - yz + zx - xr + yr$
6. $-7x^2 + 8xy$
7. $-3k^2 + 21kl - 21km$
8. $a^3 + b^3 + c^3 - a^2b + b^2a - b^2c + c^2b + a^2c - c^2a$

अभ्यास- 11.3

1. (i) $6a^2 - 19a - 36$ (ii) $2x^2 - 5xy + 2y^2$ (iii) $k^2l - kl^2 - l^2m + klm$
   (iv) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$
2. (i) $2x^2 - 3xy + 3x^2y + 3xy^2 - 5y^2$
   (ii) $3a^2b^2 - a^3b - 2ab^3 - 3a^2bc + 39b^2c$
   (iii) $klmn - lm^2n - k^2l^2 + kl^2m + k^2lm - klm^2$
   (iv) $p^4 - 5p^3q + 6p^3r + pq^3 + 6q^3r - 5q^4$
3. i) $10x^2 - 14xy$ ii) $m^3 + n^3$ iii) $-19a^2 - 34ab + 16ac - 3b^2 + 3c^2$
   iv) $p^2q^2 - q^2r^2 + p^2qr + pqr^2 - p^2q - pq^2 - p^2r + pr^2$

अभ्यास - 11.4

1. i) $9k^2 + 24kl + 16l^2$ ii) $a^2x^4 + 2abx^2y^2 + b^2y^4$
   iii) $49d^2 - 126de + 81e^2$ iv) $m^4 - n^4$
   v) $9t^2 - 81s^2$ vi) $k^2l^2 - m^2n^2$
   vii) $36x^2 + 66x + 30$ viii) $4b^2 - 2ab + 2bc - ca$
2. i) 92416 ii) 259081 iii) 9,84,064 iv) 6,38,401
   v) 89,984 vi) 6391 vii) 11,772 viii) 42,024

12. अवयव पाडणे

अभ्यास - 12.1

1. (i) 2, 4, 8 (ii) 3, a (iii) 7, x, y, 7x, 7y, 7xy (iv) 2, m, m^2, 2m, $2m^2$
   (v) 5 (vi) 2, x, 2x (vii) 2, 3, 6, x, y, 2x, 2y, 2xy, 3x, 3y, 3xy, 6x, 6y, 6xy

SCERT TELANGANA

2. i) $5x(x-5y)$ (ii) $3a(3a-2x)$ (iii) $7p(p+7q)$
   iv) $12a^2b(3-5c)$ (v) $3abc(a+2b+3c)$
   vi) $p(4p+5q-6q^2)$ (vii) $t(u+at)$
3. (i) $(3x-4b)(a-2y)$
   (ii) $(x^2+5)(x+2)$ (iii) $(m+4)(m-n)$
   (iv) $(a^2-b)(a-b^2)$ (v) $(p-1)(pq-r^2)$

अभ्यास - 12.2

1. (i) $(a+5)^2$ (ii) $(l-8)^2$ (iii) $(6x+8y)^2$ (iv) $(5x-3y)^2$
   (v) $(5m-4n)^2$ (vi) $(9x-11y)^2$ (vii) $(x-y)^2$ (viii) $(l^2+2m^2)^2$
2. (i) $(x+6)(x-6)$ (ii) $(7x+5y)(7x-5y)$ (iii) $(m+11)(m-11)$
   (iv) $(9+8x)(9-8x)$ (v) $(xy+8)(xy-8)$ (vi) $6(x+3)(x-3)$
   (vii) $(x+9)(x-9)$ (viii) $2x(1+4x^2)(1+2x)(1-2x)$
   (ix) $x^2(9x+11)(9x-11)$ (x) $(p-q+r)(p-q-r)$
   (xi) $4xy$
3. (i) $x(lx+m)$ (ii) $7(y^2+5z^2)$ (iii) $3x^2(x^2+2xy+3z)$
   (vi) $(x-a)(x-b)$ (v) $(3a+4b)(x-2y)$ (vi) $(m+1)(n+1)$
   (vii) $(b+2c)(6a-b)$ (viii) $(pq-r^2)(p-1)$ (ix) $(y+z)(x-5)$
4. (i) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ (ii) $(a^2+b^2+c^2+2bc)(a+b+c)(a-b-c)$
   (iii) $(l+m-n)(l-m+n)$ (iv) $\left(7x+\frac{4}{5}\right)\left(7x-\frac{4}{5}\right)$
   (v) $(x^2-y^2)^2$ (vi) $(5a-b)(5b-a)$
5. (i) $(a+6)(a+4)$ (ii) $(x+6)(x+3)$ (iii) $(p-7)(p-3)$
   (iv) $(x-8)(x+4)$

अभ्यास - 12.3

1. (i) $8a^2$ (ii) $\frac{1}{3}x$ (iii) $9a^2b^2c^2$ (iv) $\frac{1}{5}yz^2$
   (v) $-6l^2m$
2. (i) $3x-2$ (ii) $5a^2-7b^2$ (iii) $x(5x-3)$ (iv) $l(2l^2-3l+4)$

SCERT TELANGANA

(v) $5abc(a - b + c)$ (vi) $(2q^2 + 3pq - p^2)$ (vii) $\frac{4}{3}(abc + 2bc)$

3. (i) $7x - 9$ (ii) $12x$ (iii) $\frac{77}{3}ab$ (iv) $\frac{27}{4}l(m+n)$

(v) $4(x^2 + 7x + 10)$ (vi) $(a + 1)(a + 2)$

4. (i) $x + 4$ (ii) $x - 2$ (iii) $p + 4$ (iv) $5a(a - 5)$

(v) $10m(p - q)$ (vi) $4z(4z + 3)$

अभ्यास - 12.4

1. $3(x - 9) = 3x - 27$
2. $x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$
3. $2x + 3x = 5x$
4. $2x + x + 3x = 6x$
5. $4p + 3p + 2p + p - 9p = p$
6. $3x \times 2y = 6xy$
7. $(3x)^2 + 4x + 7 = 9x^2 + 4x + 7$
8. $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$
9. $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$
10. (a) 0 (b) 30 (c) -6
11. $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$
12. $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$
13. $(3a + 4b)(a - b) = 3a^2 + ab - 4b^2$
14. $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$
15. $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$
16. $5x^3 \div 5x^3 = 1$
17. $(2x^3 + 1) \div 2x^3 = 1 + \frac{1}{2x^3}$
18. $(3x + 2) \div 3x = 1 + \frac{2}{3x}$
19. $(3x + 5) \div 3 = x + \frac{5}{3}$
20. $\frac{4x+3}{3} = \frac{4}{3}x + 1$

13. 3 - D चे 2 - D दृष्यमान

अभ्यास - 13.1

3. (i) 5 (ii) 9 (iii) 20 (iv) 14
4. (i) 3 चौ.एकक (ii) 9 चौ.एकक (iii) 16 चौ.एकक (iv) 14 चौ.एकक

SCERT TELANGANA

अभ्यास -13.2

1.

F	V	E	V + F = E + 2
5	6	9	समाधानकारक आहे.
7	10	15	,,
8	12	18	,,
6	6	10	,,
5	5	8	,,
8	12	18	,,
8	6	12	,,
6	8	12	,,

2. सर्व घन चौरसचिती होते परंतु व्यत्यस सत्य नाही 3. अस्तीत्वात नाही 4. होय

5. F = 20, V = 6, E = 12, V + F – E = 2 6. नाही

7.

V	E
8	12
5	8
6	9

8. (i)षटकोनी पिरॅमिड (ii) दिर्घघन (iii) पंचकोनी पिरॅमिड
(iv) दंडगोलवृत्तचिती (v) घन (vi) षटकोनी पिरॅमिड
(vii) समलंब चर्तुभुज

9. (i) a, b, c, d, e (ii) (a) चतुष्फलक (b) गोल
(c) घन/घनाभ (d) गोल
(e) घन हे नियमीत बहुभुजाकृती आहे. जेथे घनाभ नियमीत नाही.
(f) घन/घनाभ (g) गोल पिरामिड

3. (a) अष्टभुजीय चिती (b) शष्टभुजीय चिती
(c) त्रिकोणाकार चिती (d) पंचभुजीय चिती

14. पृष्टफळ आणि घनफळ

अभ्यास - 14.1

1. A 2. 10 से.मी^{2} 3. 9m^2

4. 72

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 14.2

1. (i) 112.996 m^3 (ii) 70m^3 (iii) 22.5m^3
2. (i) 13.92m^3, 13920 liters. (ii) 5.2 m^3, 5200 liters
   (iii) 36.792 m^3, 36792 liters.
3. घनफळ $\frac{7}{8}$ इतके कमी होते.
4. (i) 262.144 cm^3 (ii) 2.197m^3 (iii) 4.096m^3
5. 6400 6. 1096 cm^3 7. 110cm^3
8. 90 9. 27 10. 6 cm.

15. संख्यांशी खेळ

अभ्यास - 15.1

1. 2 ने भाग जाणाऱ्या संख्या1200, 836, 780, 4820, 48630

   5 ने भाग जाणाऱ्या संख्या1200, 535, 780, 3005, 4820, 48630

   10 ने भाग जाणाऱ्या संख्या1200, 780, 4820, 48630

   आपणास असे दिसुन येते की, जर संख्येला 10 ने भाग जात असेल तर त्यासंख्येला 2 आणि 5 ने सुध्दा भाग जातो..
2. (a), (b), (c), (e) ला 2 ने भाग जातो.
3. (a), (b), (c) (d) ला 5 ने भाग जातो.
4. (a), (b), (d), (e) ला 10 ने भाग जातो.
5. (a) 6 (b) 8
   (c) 6 (d) 12
6. 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... 7. 6

अभ्यास - 15.2

1. A = 2 किंवा 5 किंवा 8 2. A = 8
3. 90, 180, 270, 360, 450 इत्यादी
4. 0 ते 9. आपणास दिसुन आले की,कोणत्याही संख्येला 2 ने भाग जातो का नाही फक्त एकक स्थानच्या सं. अंकारव अवलंबुन आहे 5. 0 किंवा 5 6. 4
7. 7 8. '0'

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 15.3

1. (a), (d) ला 6 ने भाग जातो.
2. (a), (b), (c), (d) ला 4 ने भाग जातो.
3. (a), (c), (d) ला 8 ने भाग जातो.
4. (a), (b), (c), (d) ला 7 ने भाग जातो.
5. (a), (b), (c), (d), (e), (i), (j), (k) ला 11 ने भाग जातो.
6. 8 चे सर्व गुणक 4 चे सुध्दा गुणक असतात.
7. A = 1, B = 9, A + B = 10

अभ्यास - 15.4

1. ला 45 ने भाग जातो.
2. ला 81 ने भाग जातो.
3. 36 आणि त्याच्या अवयवाने भाग जातो.
4. 36 आणि त्याच्या अवयवाने भाग जाता
5. 11 आणि 7 ने पुर्ण भाग जातो तसेच 11 व 7 च्या गुणाकाराने भाग जातो.
6. 5 आणि 7 ने पुर्ण भाग जातो तसेच 5 व 7 च्या गुणाकाराने भाग जातो.
7. दोन्ही संख्येला आणि त्याच्या बेरजेला 6 ने भाग जातो.
8. दोन्ही संख्येला आणि त्याच्या बेरजेला 3 ने भाग जातो.
9. 2 आणि 4 ने भाग जातो.
10. 4 आणि 8 ने भाग जातो.
11. A = 3, B = 2

अभ्यास - 15.5

1. (a) A = 9 (b) B = 5 (c) A = 3 (d) A = 6, बेरीज = 2996
   (e) A = 4, B = 1
2. (a) A = 5 (b) A = 8 (c) A = 9
3. (a) D = 5, E = 0, F = 1 (b) C = 1, G = 2, H = 0
4. (a) K = 6, L = 2 (b) M = 5, N = 0
5. A = 8, B = 7, C = 6

SCERT TELANGANA

Exercise - 15.6

1. 1050
2. 620
3. 216
4. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ तीन क्रमीत अंकाचा गुणाकार
5. कृत्रीम विषम संख्येचे बेरीज $\frac{(2n-1)(2n)}{2} = n(2x-1)$ 'n' चे गुणक
6. $(1^{11} + 4^{11}) + (2^{11} - 3^{11})$ ला 5 ने पुर्ण भाग जातो.
7. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
8. 1200 रुपये
9. 3050
10. 166833-18 = 166815.

SCERT TELANGANA

पाठ्यक्रम

संख्या पध्दती (50 तास)

(i) संख्याशी खेळ

(ii) परिमेय संख्या

(iii) वर्ग संख्या, घनसंख्या, वर्गमुळ, घन, घनमुळ

(i) Playing with numbers

- सामान्य विधानाच्या रुपात 2 आणि 3 अंकी संख्या लिहिणे, आणि समजणे. (100a + 10b + c) येथे a, b, c फक्त अंक (0-9) आणि या संबंधीत कोड्यात वापरलेले आहेत (जसे प्रश्नातील कोणत्याही चार क्रिया वापरुन इंग्रजी मुळ अक्षराने दर्शवुन वगळलेल्या संख्या माहित करते.)
- संख्या कोडे आणि खेळ

  परिमेय संख्या

(ii) परिमेय संख्या

- परिमेय संख्या गुणधर्म (समानते सहीत).
- गुणधर्माचे वर्णन, गुणधर्माची कृतज्ञता करण्याची पदावलीच्या सामान्य विधानाच्या रुपात वापर करणे.
- संख्यांना रेषेवर परिमेय संख्याना दर्शविणे.
- कोणत्याही दोन परिमेय संख्येमध्ये एक दुसरी परिमेय संख्या असते (मुल तयार करतांना पाहाकी, जर आपण दोन परिमेय संख्या घेतलेल्या असता ज्यापुर्ण संख्येचा वेगळे आहे. या संदर्भात त्या मध्ये असलेल्या जास्तीत जास्त संख्या माहित करा.)
- परिमेय संख्यांना दशांश संख्येच्या रुपात दर्शविणे त्याचप्रमाणे उलट (10, 100, ...पेक्षा वेगळे छेद)
- परिमेय संख्येवर क्रियाचे एकत्रीकरण
- परिमेय संख्यावर शाब्दीक प्रश्न (सर्व क्रिया)
- शाब्दिक प्रश्न (मोठे तर्क, सर्व क्रिया, योजनेसहित जसे क्षेत्रफळ)

(iii) वर्ग संख्या, घनसंख्या, वर्गमुळ, घन, घनमुळ,

- वर्ग संख्या आणि घनमुळ
- 4 अंकापेक्षा जास्त नसणाऱ्या b)2 पेक्षा जास्त दशांश नसणाऱ्या संख्याचे अवयव पध्दतीने किंवा भागाकार पध्दतीचा वापर करणे.

SCERT TELANGANA

	• पायथा गोरीयन त्रिकुट पायथागोरसच्या सिंध्दतांची तपासणी • घन संख्या आणि घनमुळ (3 अंकी संख्येसाठी फक्त अवयव पध्दतीने). • कंसाचा वार • BODMAS नियमाचा वापर करुन कंसाला संक्षिप्त करणे.
बिजगणित (20 तास) **(i) घातांक आणि घात** **(ii) बैजिक पदावली** **(iii) एका चलातील रेषीय समीकरण**	**(i)** घतांक आणि घात • पुर्णांक घातांक • घातांकाचे नियम संपुर्ण घतासोबत • संख्याचे प्रमाणिक रुप **(ii) बैजीक पदावली** • बैजिक पदावलीचा गुणाकार (सहगुणक पुर्णांक असायला पाहिजे.) • काही सामान्य चुका (उदा. $2 + x \neq 2x$, $7x + y \neq 7xy$) • सामान्यता $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ • समानतेची भुमीतीय पडताळणी / तपासणी • अवयव पाडणे (साध्या संदर्भात फक्त) • सामान्य अवयव बाहेर काढुन अवयव पाडणे. • पदांचे गट पाडुन अवयव पाडणे. • समानतेचा वापर करुन अवयव पाडणे • $(x + a)(x + a)$ च्या रुपातील अवयव • बैजिक पदावलींचा भागाकार **(iii) एका चलातील रेषीय समीकरण** • एका चलातील संदर्भदर्शी रेषीय समीकरण सोडविणे ज्या गुणाकार आणि भागाकार याचा समावेश असतो (शाब्दिक) • प्रमाणाच्या साहाय्याने राशींची तुलना • संयुक्त गुणोत्तर - शाब्दिक प्रश्न

SCERT TELANGANA

	• टक्केवारी, नफा आणि तोटा अनावश्यक खर्च, सुट, कर, यावर आधारीत प्रश्न ज्यामध्ये उपयोजन आहे. (पर्यायी कामकाज) • सरळव्याज आणि चक्रवाढ व्याजामधील फरक (दरवर्षी काढुन 3 वर्ष पर्यंत किंवा सहामहिणे फक्त 3 पायऱ्या पर्यंत) चक्रवाढ व्याजासाठी सुत्राकडे येऊन नमुन्याव्दारे आणि त्याचा उपयोग साध्या प्रश्नासाठी करणे. • प्रत्यक्ष प्रमाण - साधी आणि सरळ शाब्दिक प्रश्न व्यस्त प्रमाण - साधे आणि सरळ शाब्दिक प्रश्न • व्यस्त प्रमाणावरील मिश्र प्रश्न • वेळ आणि अंतर साधे आणि सरळ शाब्दिक प्रश्न
भुमीती (40 तास) **(i) चौकानाची रचना** **(ii) 3-D ला 2D मध्ये दर्शविणे** **(iii) भुमीतीय आकृत्यांना**	**(i) चौकानाची रचना** • चौकोन आणि त्याच्या गुणधर्माची उजळणी • चौकोनाची रचना हे दिले असता. • चार बाजु आणि एक कोन • चार बाजु आणि तीन कर्ण • दोन लगतच्या बाजु, तीन कोन • तीन बाजु आणि दोन कर्ण • त्यामधील तीन बाजु दोन कोन दिलं असता. • दोन कर्ण दिलेल्या विशेष चौकोनांच्या प्रकारची रचना करणे **(ii) 3-D ला 2D मध्ये दर्शविणे** • चित्रास वस्तुसोबत जोडी लावा आणि ओळखा [कठीण आहे उदा. घट्टे 2-D आणि3-D आकारास जोडा (2पेक्षा जास्त नाही)]. • 2-D वस्तुंची दर्शवणुक 3-D वस्तु मध्ये आयसीमेट्रीक चा उपयोग करुन • शिरोंबिंदु कडा आणि बाजु यांची मोजणी करुन सपाट पृष्ठभाग असलेल्या 3-D आकृतीसाठी आयलर संबंधाचा पडताळा करा (घन, आयतज, त्रिकोणीय पिरॅमिड, चिती आाणि पिरॅमिड)

SCERT TELANGANA

	(iii) भुमितीय आकृत्या शोधुन काढणे - एकरुप आकृत्या - सारख्या आकृत्या - भुमीतीय आकृत्यामधील जसे त्रिकोण, चौकोन आणि वर्तुळ मधील सममीती
Mensuration (15 hrs) **(i) Area of Plain Figures** **(ii) Surface areas and Volumes**	**(i) प्रतलिय आकृत्यांचे क्षेत्रफळ** - हेरानच्या सुत्रावरुन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ आणि चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी त्याचे उपयोजन • समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ • चौकोनाचे क्षेत्रफळ आणि इतर बहुभुजी • वर्तुळाचे क्षेत्रफळ आणि वर्तुळाकार रस्ता **(ii) घनाच्या पृष्टभागाचे आयतजाचे क्षेत्रफळ** • आयतजाचे क्षेत्रफळ • घनफळाची कल्पना, मुलभुत एककाचा वापर करुन घनफळ काढणे. • आयताजाचे घनफळ
वारंवारता (15 तास) **सारणी आणि आलेख**	**वारंवारता सारणी आणि आलेख** - असंग्रहीत सामग्रीचा मध्य, मध्यक आणि बहुलुकाची उजळणी - विचलन पध्दतीने मध्य काढणे. * 0 संग्रहीत माहितीची आवश्यकता आणि वाव - वारंवारता वितरणाची सारणी तयार करणे - संचित वारंवारता वितरणाची सारणी - वारंवारता आलेख(स्तंभालेख, वारंवातर बहुभुजी, वारंवारता वक्र, संचित वारंवारता वक्र)

SCERT TELANGANA

पाठ्यक्रम पुस्तकी प्रमाण

पाठ्य पुस्तकी प्रमाण हे विद्यार्थ्यांस काय माहित असावे आणि ते काय केले पाहिजे याबद्दलचे स्पष्ट विधान आहेत.

खालील प्रकाराच्या आधारावरुन आपण पुस्ताकी प्रमाणाची कल्पना मांडली आहे.

गणिताचे प्रश्न सोडविण्यासाठी कल्पना आणि पध्दतीचा वापर

प्रश्न सोडविण्याचा पायऱ्या

- प्रश्न वाचणे
- सर्व प्रकाराची माहिती / सामग्री ओळखणे
- संबंधीत माहिती वेगळी करणे.
- मांडलेली कल्पना समजणे.
- पध्दतीची निवड
- प्रश्न सोडविणे

गुंतागुंत

- प्रश्नांची गुंतागुंत या वर निर्भर राहते.
- अनुसंधान करने - अनुसंधानाच्यसा विभागात व्याख्येप्रमाणे
- प्रश्नातील क्रियाची संख्या
- प्रश्नातील पायऱ्यांची संख्या
- प्रश्नातील आवश्यक संदर्भाचा उलगडा करणे.
- प्रश्नातील पध्दतीचा प्रकार

2. (विचार सारणी) मुद्दयाची सिध्दता :

- विविध पायऱ्यामधील विचार सारणी
- गणितीय सामान्य विधान बनविणे, आणि तर्क काढणे, आणि समजणे.
- समजने आणि पध्दतीच्या दोषाचे निराकरण करणे.
- तार्किक वादाची तपासणी करणे.

SCERT TELANGANA

- सिध्दतेचा उद्देश समजणे
- आगमन आणि निगमन तर्काचा वापर
- गणितीय अनुमानाची कसोटी

परस्तर संबंध

- गणितीय पदावली लिहिणे आणि वाचणे जसे

  $3+4=7$

  $\frac{3}{4}$

- गणीताच्या पदावल्या बनविणे.
- गणितीय योजना आपल्या शब्दात स्पष्ट करणे जसे

  चौरस ही बंद आकृती आहे ज्याच्या चार बाजु आणि चार कोन समान आहेत.

- गणितीय पध्दती समाजवणे जसे, दोन अंकी बेरजेमध्ये पहिल्यांदा अंक एकम स्थानी मिळवुन नंतर अंकास दशम स्थानी मिळवुन हातच्याला मनात धरुन करणे.
- गणितीय तर्क समाजवुन सांगणे

संबंध - अनुसंधान

- गणितीय प्रदेशातील कल्पनाचे संबंध उदा. गुणाकाराची बेरीज पुर्ण भागाच्या गुणोत्तराशी भागाकाराशी नमुने आणि सममीती मापनांची जागा
- नित्य जिवनाशी संबंध बनविणे.
- गणिताचा विविध विषयांशी संबंध जोडणे.
- वेगवेगळया गणितीय प्रदेशाचा कल्पनेचा संबंध जोडे. जसे माहिती हाताळणे, अंकगणितीय आणि जागा
- पर्यायी पध्दतीचा कल्पनाशी संबंध जोडणे.

दृष्य दिसणे आणि प्रदर्शन

- तक्त्यातील माहिती सामग्री चा अर्थ सांगणे आणि वाचने संख्या रेषा, चित्रालेख, स्तंभालेख, 2 -डी. आकृत्या, 3-डी आकृत्या चित्र
- तक्ता बनविने, संख्या रेषा, चित्रालेख, स्तंभालेख चित्र

SCERT TELANGANA